http://www.xriadiat.com **DS3: O** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures (La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (3pts) $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$; $a=\sqrt{3}$ et $b=1$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Après encadrement dans : $[0;2\pi]$ On trouve : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercice2 : (3,5pts) : $(2\text{pt}+1,5\text{pt})$

1) Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ et soit $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

1)Calculer : $\tan(2\beta)$

2) En déduire que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

Solution :1) On a : $\tan(2\beta)=\frac{2\tan(\beta)}{1-\tan^2(\beta)}$ $\forall\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Or $\tan(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\Rightarrow\tan^2(\beta)=\frac{\sin^2(\beta)}{\cos^2(\beta)}=\frac{\sin^2(\beta)}{1-\sin^2(\beta)}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$ et comme $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Alors : $\tan(\beta)>0$ donc : $\tan(\beta)=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

Par suite : $\tan(2\beta)=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{3}{4}}$

2) Déduisons que : $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$

Calculons : $\tan(\alpha + 2\beta)$

On a : $\tan(\alpha+2\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(2\beta)}{1-\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)} = \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$

Donc : $\tan(\alpha+2\beta) = 1$

Donc : $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ avec: $k \in \mathbb{Z}$

Mais on a : $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

Donc : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$

Donc : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$

Donc : $0 < \alpha + 2\beta < \pi$

Donc : $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < \pi$ c'est-à-dire : $0 < \frac{1}{4} + k < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{k = 0}$

Par suite : $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{4}$

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt} + 1{,}5\text{pt} + 1{,}5\text{pt})$

Soit $x \in \mathbb{R}$

1) Factoriser les expressions suivantes : $\sin 5x - \sin 3x$ et $\sin 5x + \sin 3x$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x \times \sin 8x$

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x + \cos 6x - 1 = 0$

Solution : 1) On sait que : $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\sin 5x + \sin 3x = 2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = 2\sin(4x)\cos(x)$

Donc : $\sin 5x - \sin 3x = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = 2\cos(4x)\sin(x)$

2) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 2x \times \sin 8x$

$\sin^2 5x - \sin^2 3x = (\sin 5x + \sin 3x)(\sin 5x - \sin 3x) = 2\sin(4x)\cos(x) \times 2\sin(x)\cos(4x)$

Donc : $\sin^2 5x - \sin^2 3x = 2\sin(4x)\cos(4x)2\cos(x) \times \sin(x) = \sin(8x)\sin(2x)$

Car : $2\cos(X) \times \sin(X) = \sin(2X)$

3) Déduisons les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0$

$\cos 6x=\cos\left(2(3x)\right)=\cos^2 3x-\sin^2 3x=1-2\sin^2 3x$

$2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 5x+1-2\sin^2 3x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 5x-2\sin^2 3x=0 \Leftrightarrow \sin^2 5x-\sin^2 3x=0 \Leftrightarrow \sin 2x\times\sin 8x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=0 \;\; ou \;\; \sin 8x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \;\; ou \;\; 8x=k\pi \quad ; k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2} \;\; ou \;\; x=\frac{k\pi}{8} \quad ; k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{k\pi}{2};\frac{k\pi}{8} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice5 : (3pts) : $(0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

1) Monter que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

2) Vérifier que : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2$

3) On pose : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t$:

Monter que : t est une solution de l'équation : $4x^2-2x-1$ et déduire que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

4) En déduire : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Solution : 1) Montons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

$\cos 5x=\cos(2x+3x)=\cos(2x)\cos(3x)-\sin(2x)\sin(3x)$

Comme on a : $\cos 2x=2cox^2x-1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Et on a $\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos(x)\times\cos(2x)-\sin(x)\times\sin(2x)\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

Comme on a : $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $\cos 3=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x\right)-2\sin^2 x\cos x=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x\right)=\cos x\times\left(1-4\sin^2 x\right)$

Donc : $\cos 3=\cos x\times\left(1-4\sin^2 x\right)$

$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin(x)\times\cos(2x)+\cos(x)\times\sin(2x)$

$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\times\left(-1+2\cos^2 x\right)+\cos x\times 2\sin x\cos x$

$\sin 3x=\sin x\times\left(-1+2\cos^2 x+2\cos^2 x\right)=\sin x\times\left(-1+4\cos^2 x\right)$

Donc: $\cos 5x=\sin x\times\left(2\cos^2 x-1\right)\left(4\cos^2 x-3\right)\cos x-2\cos x\sin^2 x\times\left(4\cos^2 x-1\right)$

$\cos 5x=\left(2\cos^2 x-1\right)\left(4\cos^2 x-3\cos x\right)-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)\left(4\cos^2 x-1\right)$

$\cos 5x=8\cos^5 x-6\cos^3 x-4\cos^3 x+3\cos x-8\cos^3 x+2\cos x+8\cos^5 x-2\cos^3 x$

Donc: $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

2) Vérifions que : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2$

$\left(4x^2-2x-1\right)^2=16x^4+4x^2+1-1-16x^3+8x^2+4x$

$\left(4x^2-2x-1\right)^2=16x^4-4x^2-16x^3+4x+1$

Donc: $\left(4x^2-2x-1\right)^2=16x^4-16x^3-4x^2+4x+1$

Donc: $(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2=(x+1)\left(16x^4-4x^2-16x^3+4x+1\right)$

Donc: $(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2=16x^5-16x^4-4x^3+4x^2+16x^4-16x^3-4x^2+4x+1$

Donc: $(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2=16x^5-20x^3+5x+1$

3) On pose : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t$

Montrons que : t est une solution de l'équation : $4x^2-2x-1$4) et déduisons que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

On a : $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$ et $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\left(4x^2-2x-1\right)^2$

$\cos 5x+1=(\cos x+1)\left(4\cos^2 x-2\cos x-1\right)^2$ on prend : $\frac{\pi}{5}=x$ on trouve : $\cos x=t$

$\cos\pi+1=(t+1)\left(4t^2-2t-1\right)^2 \Leftrightarrow 0=(t+1)\left(4t^2-2t-1\right)^2$ et puisque : $t\neq-1\Leftrightarrow t+1\neq 0$

$\Leftrightarrow 0=4t^2-2t-1$ $\Delta=20$ $t=\frac{-\sqrt{5}+1}{4}$ ou $t=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t>0$ car $0\prec\frac{\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$

Alors : $t=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

4)Déduction : On a : $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$ et comme/ $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ car $0\prec\frac{\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$

Alors : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a aussi : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1=\frac{6+2\sqrt{5}-8}{8}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

On a aussi : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

On a aussi : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}/2\right)$; $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}/2\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right)$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}+1\right)=\frac{\sqrt{5}+5}{8}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)>0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

On a aussi : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ car $\sin(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(10-2\sqrt{5}\right)^2}{80}}=\frac{10-2\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Exercice6 : (3,5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt})$

Exercice2 : (3pts)

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ tel que : $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$ et soit $\beta\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\beta=2$

Calculer : $\alpha-2\beta$

Solution : Calculons : $\tan(\alpha-2\beta)$

On a : $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(2\beta)}{1+\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}$

Calculons : $\tan(2\beta)$

$$\tan(2\beta)=\frac{2\tan(\beta)}{1-\tan^2(\beta)}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$$

Donc : $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(2\beta)}{1+\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}=\frac{-\frac{1}{7}+\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{7}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$

Donc : $\alpha-2\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Mais on a : $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ et $\beta\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $\frac{\pi}{2}<2\beta<\pi$

Donc : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $-\pi<-2\beta<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{3\pi}{2}<\alpha-2\beta<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi<-\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{2}<\frac{1}{4}+k<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow -1,75<k<-0,75\Rightarrow\boxed{k=-1}$

Par suite : $\alpha-2\beta=\frac{\pi}{4}+(-1)\times=\frac{\pi}{4}-\pi=\boxed{-\frac{3\pi}{4}}$

Exercice3 : (3pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$;

$(1,5\text{pt})$ Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=(-1)^n\sin\sqrt{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :
$\forall n\in I\ |u_n|\le M$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $|u_n|=\left|(-1)^n\sin\sqrt{n}\right|=\left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right|=\left|\sin\sqrt{n}\right|\le 1$

Donc : $|u_n|\le 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice4 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Calculer : $u_{n+1}-u_n$ en fonction de n

3) Calculer : $u_{2n+1}-u_n$ en fonction de n

Solution : 1) Pour n=1 on a : $u_1=1\Rightarrow \boxed{u_1=1}$

Pour n=2 on a : $u_2=1+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{u_2=\frac{3}{2}}$

Pour n=3 on a : $u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{u_3=\frac{11}{6}}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

$$u_{2n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}...+\frac{1}{2n+1}}$$

Exercice5 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n=2^{n-1}(1-3n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Vérifier que : $v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n$

Solution : On a : $v_{n+2}=2^{n+2-1}\left(1-3(n+2)\right)=2^{n+1}\left(1-3(n+2)\right)$

$$4v_{n+1}-4v_n=4\times 2^n\left(1-3(n+1)\right)-4\times 2^{n-1}(1-3n)=2^2\times 2^n(-2-3n)-2^2\times 2^{n-1}(1-3n)$$

$$4v_{n+1}-4v_n=2^{n+2}(-2-3n)-2^{n+1}(1-3n)=2^{n+1}(-4-6n-1+3n)=2^{n+1}\left(1-3(n+2)\right)$$

Donc : $v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice9 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $-1\le\cos n\le 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $-1\le\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $-1\le -\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $2\le 3-\sin\sqrt{n}\le 4$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\sin\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{4} \leq \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \leq \frac{3}{2}$

Cad : $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{3}{2}$

Solutions : Montrons que $\frac{3}{2} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $\frac{3}{2} \leq u_0$ car $\frac{3}{2} \leq 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $\frac{3}{2} \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $\frac{3}{2} \leq u_{n+1}$??

$u_{n+1} - \frac{3}{2} = 3 - \frac{9}{4u_n} - \frac{3}{2} = \frac{6\left(u_n - \frac{3}{2}\right)}{4u_n}$ et puisque on a : $\frac{3}{2} \leq u_n$ alors : $u_n - \frac{3}{2} \geq 0$ et $0 \prec 4u_n$

Donc : $u_{n+1} - \frac{3}{2} \geq 0$ c'est-à-dire : $\frac{3}{2} \leq u_{n+1}$

Donc : $\frac{3}{2} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{3}{2}$

Exercice12 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n} \ ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 0.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\} \quad : u_n \leq 0$

1étapes : calculons u_2

$u_{1+1} = \frac{(3+3)u_1 - 8 - 12}{1} \Rightarrow u_2 = \frac{18-8-12}{1} \Rightarrow u_2 = -2$

On a : $u_2 \leq 0$ donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $u_n \leq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 0$??

On a : $u_n \leq 0$ et $n \succ 0$ donc $(3n+3)u_n - 8n - 12 \prec 0$

Donc : $u_{n+1} \prec 0$ et donc : $u_{n+1} \leq 0$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}-\{0;1\}\ \ : u_n \leq 0$

Donc : $(u_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 0.

Exercice2 : $(5{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solutions : $u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$

Donc : $u_{n+1}-u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} \succ 0$ par suite : $u_n \leq u_{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice16 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=\alpha$ avec : $\alpha \succ 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) Montrer que : la suite (u_n)est minorée par 1

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Solutions : 1) Montrons que $1 \leq u_n\ \ \ \forall n \in \mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $1 \leq u_0$ car $1<\alpha$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $1 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $1 \leq u_{n+1}$??

Remarque importante : on peut essayer d'écrire : u_{n+1} sous une autre écriture pour pouvoir faire des encadrements : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} = \frac{2(u_n+2)-3}{u_n+2} = \frac{2(u_n+2)}{u_n+2} - \frac{-3}{u_n+2} = 2 - \frac{-3}{u_n+2}$

On a : $1 \leq u_n$ donc : $3 \leq u_n+2$ donc : $\frac{1}{u_n+2} \leq \frac{1}{3}$ donc : $\frac{-3}{u_n+2} \geq \frac{-3}{3}$ donc : $\frac{-3}{u_n+2} \geq -1$

Donc : $2+\frac{-3}{u_n+2} \geq 1$ Donc : $1 \leq u_{n+1}$ CQFD

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Etude du signe de : $u_{n+1}-u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{-u_n^2+1}{u_n+2} = \frac{1-u_n^2}{u_n+2} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

On a : $1 \leq u_n$ donc : $1-u_n \leq 0$ et $0 \leq 1+u_n$ et $0 \prec 2+u_n$

Donc : $u_{n+1}-u_n \leq 0$ Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice17 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Solutions : Montrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$: $\forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc : $u_0 \leq u_1$.

Donc : la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n \leq u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$??

On a : $u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_n + 2 \leq u_{n+1} + 2$ donc : $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice18 : Soit fonction f définie par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$:($\forall n \in \mathbb{N}$)

1) Dresser le tableau de variation de f

2)a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Solution : 1) $\forall x \in \mathbb{R}$; Pour : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$; On a f est une fonction polynôme donc :

$D_f = \mathbb{R}$: On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a = 1 \succ 0$ et $b = \frac{3}{4}$ et $c = 0$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{8}$ et $f(\alpha) = f\left(-\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{15}{56}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{15}{56}$	↗

Donc : f est strictement croissante sur $I = \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right[$ et f est strictement décroissante sur

$J = \left]-\infty, -\frac{3}{8}\right]$

2) a) Montrons que :($\forall n \in \mathbb{N}$) : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$?

On a : $0 \leq u_0 = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4}$ la ppté est vraie pour n=0

Supposons que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

Montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$?

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ f est strictement croissante sur $I = \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right[$ donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

Donc : $f(0) \leq u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ et comme : $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Alors : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$ Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

$u_{n+1} - u_n = u_n{}^2 + \frac{3}{4}u_n - u_n = u_n{}^2 - \frac{1}{4}u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$

Et puisque : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ alors : $0 \leq u_n$ et $u_n - \frac{1}{4} \leq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$: $(\forall n \in \mathbb{N})$

Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice3 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \ ; \ v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $v_2 ; v_3 ; v_4$

Solution : On a $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour n=0 on a: $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$ donc $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

Donc : $v_2 = 2\times(-1) - 3\times 1 = -5$

Pour n=1 on a: $v_{1+2} = 2v_{1+1} - 3v_1$ donc $v_3 = 2v_2 - 3v_1$

Donc : $v_3 = 2(-5) - 3(-1) = -7$

Pour n=2 on a: $v_{2+2} = 2v_{2+1} - 3v_2$ donc $v_4 = 2v_3 - 3v_2$

Donc : $v_4 = 2(-7) - 3(-5) = -14 + 15 = 1$

Exercice14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$: $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Avec : $n! = 1\times 2\times 3\times ...\times n$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Comme : $u_n = \frac{n!}{3^n} \succ 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{3^n \times 3^1} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

On a : $n \geq 2$ alors : $n+1 \geq 3$ et donc : $\frac{n+1}{3} \geq 1$

Alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $u_n \leq u_{n+1}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante

Exercice19 : Etudier la nature des *suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = n^2 + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution :1) On a : $u_{n+1} = u_n - 3 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -3 = constante$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r = −3 et de premier terme $u_0 = 2$

2) On a : $v_0 = 2$; $v_1 = 3$; $v_2 = 6$

Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

On a aussi : et $\frac{v_1}{v_0} = \frac{3}{2}$ et $\frac{v_2}{v_1} = 2$ c'est-à-dire : $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique

Exercice20 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et $u_0 = -2$

1) Calculer : u_1

2) Montrer que : $u_n = -2(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Est ce que le terme -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$? justifier votre réponse

4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = -2$ et sa raison $r = -2$

alors :$u_1 = u_0 + r = -2 + -2 = -4$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique alors : $u_n = u_0 + nr = -2 + (-2)n = -2(1+n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $u_n = -22 \Leftrightarrow -2(1+n) = -22 \Leftrightarrow 1+n = \frac{-22}{-2} \Leftrightarrow 1+n = 11 \Leftrightarrow n = 11-1 \Leftrightarrow n = 10$

Donc : -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$ et on a : $u_{10} = -22$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10-0+1)\frac{u_0 + u_{10}}{2}$

$S = 11\frac{-2 + -22}{2} = 11 \times \frac{-24}{2} = 11 \times (-12) = -132$

Exercice 21 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5 = -7$ et $u_8 = 2$

et Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n = 25 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Vérifier que la raison de la suite $(u_n)_n$ est : $r = 3$

b) Calculer :$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

b) Calculer la somme suivante : $S_2 = v_0 + v_2 + \cdots + v_6$

Solution :1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5 = -7$ et $u_8 = 2$

Donc : $u_n = u_p + (n-p)r$

On pose : n=8 et p=5

Donc : $u_8 = u_5 + (8-5)r$

Donc : $2 = -7 + 3r$

Donc : $2 + 7 = 3r$

Donc : $9 = 3r$ c'est-à-dire : $r = \frac{9}{3} = 3$

b) Calcul de la somme suivante : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = (6-0+1)\frac{u_0 + u_6}{2}$

On a : $u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_8 = u_0 + (8-0)\times 3$

Donc : $2 = u_0 + 24$

Donc : $2 - 24 = u_0$ Donc : $-22 = u_0$

Et on a : $u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_6 = u_0 + (6-0)3$

Donc : $u_6 = -22 + 18 = -4$

Donc : $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6 = 7\frac{-22 + (-4)}{2} = 7\frac{-26}{2} = 7\times(-13) = -91$

2) a) On a : $v_n = 25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1-n} = \left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3} = q$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

3) Puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

Alors : $S_2 = v_0 + v_2 + \cdots + v_6 = v_0\frac{1-q^{6-0+1}}{1-q}$

On a : $v_n = 25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n$

Pour n=0 : on a :$v_0 = 25\times\left(\frac{5}{3}\right)^0$ par suite : $v_0 = 25\times 1 = 25$ car $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$

$$S_2 = 25\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{1-\frac{5}{3}} = 25\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{-\frac{2}{3}} = -25\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right) = -\frac{75}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right)$$

Exercice22 : Déterminer le réel x pour que les nombres : $3x-1$; $1-4x$ et $x-5$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $3x-1$; $1-4x$ et $x-5$ les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

$$\Leftrightarrow 2(1-4x)=(3x-1)+(x-5) \Leftrightarrow -8x+2=4x-6 \Leftrightarrow -12x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Donc les termes de la suite sont : $3\times\frac{2}{3}-1=1$ et $1-4\times\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}-5=-\frac{13}{3}$

Donc : $-\frac{5}{3}-1=-\frac{8}{3}=r$

Exercice23 : Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1) $s_n=\sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+...+n$

2) $s_n' = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)$

Solutions :1) on pose : $u_n = n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=1

Car : $u_{n+1}-u_n=1$

Donc : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n} k = u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

Donc : $s_n=\frac{n}{2}(1+n)$

1)on pose : $v_n=2n+1$

On a : $(v_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=2

Car : $v_{n+1}-v_n=2$

Donc : $s_n'=\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)=v_0+v_1+v_2+...+v_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$

Donc : $s_n'=\frac{n+1}{2}(1+2n+1)=\frac{n+1}{2}(2n+2)=(n+1)^2$

Exercice24 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que : $\begin{cases} 3u_1+2u_2=21 \\ 5u_1-u_2=9 \end{cases}$

1) Calculer : u_1 et u_2

2) Calculer la raison q de cette suite

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer la somme suivante : $S=u_1+u_2+\cdots+u_5$

Solution : 1) Calculons : u_1 et u_2

On a : $\begin{cases}3u_1+2u_2=21\\5u_1-u_2=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3u_1+2u_2=21 & (1)\\10u_1-2u_2=18 & (2)\end{cases}$

Donc : $(1)+(2) \Rightarrow 13u_1=39 \Rightarrow u_1=3$

$5u_1-u_2=9 \Rightarrow u_2=5u_1-9 \Rightarrow u_2=6$

Donc : $u_1=3$ et $u_2=6$

2) La raison q ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p\times q^{n-p}$

Pour n= 2 et p = 1 on a : $u_2=u_1q^1 \Leftrightarrow \boxed{q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{6}{3}=2}$

3) Ecriture de u_n en fonction de n

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p\times q^{n-p} \Rightarrow u_n=u_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$

4) Calculons la somme : $S=u_1+u_2+\cdots+u_5$

$(u_n)_n$ est une suite géométrique donc : $S=u_1+u_2+\cdots+u_5=u_1\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=3\frac{1-2^5}{1-2}=\boxed{93}$

Exercice25 : problème

La location d'une machine coûte 60 DH la 1ère journée. La 2ème journée de location coûte 65 DH et chaque journée supplémentaire 5 DH de plus que la précédente.

Combien de jours pourra-t-on utiliser la machine avec un budget de 3570 DH ? Vous ferez apparaître sur votre copie tous les calculs nécessaires.

Solution : $(u_n)_{n\geq1}$ Une suite arithmétique :La raison r de cette suite : $r=5\,DH$

Dont le premier terme est : $u_1=60DH$ La location pour la 1ère journée

$u_2=65DH$ La location pour la 2ère journée

....

$u_n=....DH$ La location pour la n ère journée

u_n en fonction de n ?

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p+(n-p)r$

Pour p = 1 on a : $u_n=u_1+(n-1)r$

Donc : $u_n=60+(n-1)5$ c'est-à-dire : $u_n=5n+55 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

La somme totale à payer serait : $s_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=n\frac{u_1+u_n}{2}=n\frac{60+5n+55}{2}=n\frac{5n+115}{2}$

Le nombre de jours pour utiliser la machine avec un budget de 3570 DH est n :

$s_n=3570 \Leftrightarrow n\frac{5n+115}{2}=3570 \Leftrightarrow 5n^2+115n-7140=0 \Leftrightarrow n^2+23n-1428=0$

$\Delta=6241$ Donc : $n=-51 \quad rejet\acute{e} \quad et \; n=28$

Le nombre de jours pour utiliser la machine avec un budget de 3570 DH est $n=28$ jours.

Exercice26 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

2) Ecrire v_n en fonction de n

3) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2u_n - 1}{u_n} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme : $v_0 = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme : $v_0 = \dfrac{1}{2}$

Donc : $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{2} + n\times 1 = \dfrac{1}{2} + n = \dfrac{2n+1}{2}$

Puisque : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ c'est-à-dire : $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$

Donc : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{1 + \dfrac{2n+1}{2}}{n+1} = \dfrac{\dfrac{2n+1+2}{2}}{\dfrac{2n+1}{2}} = \dfrac{\dfrac{2n+3}{2}}{\dfrac{2n+1}{2}} = \dfrac{2n+3}{2n+1}$

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$; Calculons : S_n en fonction de n

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = n\dfrac{v_0 + v_{n-1}}{2}$

On a : $v_n = \dfrac{2n+1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = \dfrac{2(n-1)+1}{2} = \dfrac{2n-1}{2}$

Donc : $S_n = n\dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{2n-1}{2}}{2} = \dfrac{n^2}{2}$

Exercice27 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Et soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; v_0

2) Montrer par récurrence que : $u_n \le 2$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 1$ c'est-à-dire : $u_1 = \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

Donc : $u_1 = \frac{3}{2}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1$ c'est-à-dire : $u_2 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

On a : $v_n = u_n - 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$ c'est-à-dire : $v_0 = -1$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$ c'est-à-dire : $v_1 = -\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \le 2$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \le 2$

Montrons que : $u_{n+1} \le 2$?

$$2 - u_{n+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = 2 - \frac{1}{2}u_n - 1 = 1 - \frac{u_n}{2} = \frac{2-u_n}{2}$$

On a : $u_n \le 2$ donc $2 - u_n \ge 0$

Donc : $\frac{2-u_n}{2} \ge 0$ par suite : $u_{n+1} \le 2$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{u_n + 2 - 2u_n}{2} = \frac{-u_n + 2}{2} = \frac{2-u_n}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Et On a : $u_n \le 2$ donc : $2 - u_n \ge 0$ par suite : $u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n}{2} \ge 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0 \le u_1 \le u_2 \le .... \le u_n$

Donc : $u_0 \le u_n$ c'est-à-dire : $1 \le u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2 car $u_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 car $1 \leq u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$?

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{u_n}{2} - 1 = \frac{u_n - 2}{2}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0 = -1$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0 = -1$

Alors : $v_n = v_0 \times q^n = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a : $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n + 2 = u_n$ et on a : $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

a) Calcul de : S_n en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\dfrac{1 - raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$

$le\ nombre\ de\ termes = n - 0 + 1 = n + 1$

Donc : $S_n = v_0 \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Exercice28 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

4) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Solution : 1) a) Montrons que : $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \geq 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $0 \leq u_n$

Montrons que : $0 \leq u_{n+1}$?

On a : $0 \leq u_n$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ donc $u_{n+1} \geq 0$

Donc : $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrons que : $u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \leq 3$

Montrons que : $u_{n+1} \leq 3$?

$$3 - u_{n+1} = 3 - \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{3(u_n + 3) - (5u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-2u_n + 6}{u_n + 3} = \frac{-2(u_n - 3)}{u_n + 3}$$

On a : $u_n \leq 3$ et $0 \leq u_n$ donc $3 - u_{n+1} \geq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq 3$

Donc : $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - u_n = \frac{5u_n + 3 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{u_n + 3}$$

On a : $0 \leq u_n$ donc $0 \prec u_n + 3$

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de : $-u_n^2 + 2u_n + 3$

$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$ donc: $x_1 = \frac{-2 + 4}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$

Donc : $-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n - 3)(u_n + 1)$

On a : $u_n \geq 0$ donc $u_n + 1 \geq 0$

Et on a : $u_n \leq 3$ donc : $u_n - 3 \leq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 3} \geq 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3 - 3(u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{5u_n + 3 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{\frac{2u_n - 6}{u_n + 3}}{\frac{6u_n + 6}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6}$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 3)}{6(u_n + 1)} = \frac{1}{3}\frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$

4)puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=-1$ alors :

$v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tt on a : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n=-3$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}$ et on a : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc : $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien