http://www.xriadiat.com **DS3: M** **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures (La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (3pts) $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

On Considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_0\geq 0$ avec : $f(x)=x^2+\frac{3}{16}$

1)Étudier f et le signe de $f(x)-x$

2)On suppose : $u_0\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$Montrer que $u_n\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, puis que (u_n)est croissante.

3) On suppose : $u_0\in\left]\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right[$. Montrer que (u_n)est décroissante et minorée.

4) On suppose : $u_0\succ\frac{3}{4}$; Montrer que (u_n)est croissante.

Exercice2 : (3,5pts) : $(2\text{pt}+1,5\text{pt})$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1) Montrer que, pour tout entier $k\in$ 1 ; n

On a : $\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n+1}$.

2)En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leq u_n\leq\frac{n}{n+1}$.

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+21} & \forall n\in\mathbb{N} \text{ et } \alpha\in\mathbb{R}\\ u_0=\alpha\end{cases}$

1)Déterminer les valeurs de α pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante

2)On pose : $\alpha=1$

a) Montrer que $0\prec u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que $u_{n+1}\leq\frac{1}{7}u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Déduire que la suite (u_n) est décroissante

d) Montrer que $u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{11u_n+4}{1-4u_n} \\ u_0=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $-2\prec u_n\prec -\dfrac{1}{2}$

2) a) Vérifier que : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(2u_n+1)(u_n+2)}{4u_n-1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Déduire la monotonie de la suite (u_n)

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $s_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_k+2}$

a) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison q

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=-2+\dfrac{3}{2+4\times 3^n}$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $s_n=\dfrac{2}{3}\left(n+3^{n+1}\right)$

4) a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}+2=\dfrac{3}{1-4\times u_n}(u_n+2)$

b) Déduire que : $u_{n+1}+2\leq\dfrac{3}{7}(u_n+2)$: $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Montrer que : $0\prec u_n+2\leq\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{7}\right)^n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{2-u_n}} \\ u_0=\dfrac{2}{9} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec 1$

2) Vérifier que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\prec 1$: $\forall n\in\mathbb{N}$ et déduire la monotonie de la suite (u_n)

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{3}{4}$ et déduire que : $0\prec u_n\leq\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice5 : (3pts) : $(0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Monsieur Hassan est un tailleur, il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500 dh. Son expérience lui permet d 'affirmer que le cout de confection unitaire augmente de 500 dh par vêtements supplémentaires.

1) Quel est le coût de confection du deuxième vêtement ? Du troisième vêtement ?
2) On désigne par Cn le coût de confection du $nième$ vêtement. Exprime Cn en fonction de n
3) Au combien n'ième vêtement le coût de confection sera-t-il 10 000dh ?

Exercice6 : $(3{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$

Exercice7 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n} \ ; \ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

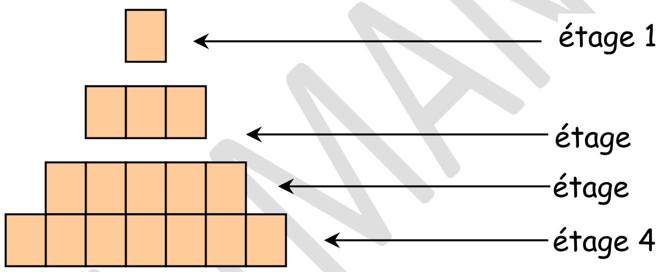
Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Solution :1) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}\succ 0$ donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3}\prec 0$$

Donc : (v_n) est décroissante.

Exercice17 : On empile des boites de conserve comme l'indique la figure de manière que l'étage n°1 ne contienne qu'une boite.
On note u_n le nombre de boites correspondant à l'étage n.



1) Quelle est la nature de la suite u_n ? Indiquer le premier terme et la raison.
2) On empile 10 étages. En utilisant les formules, calculer le nombre total de boites de cet empilage.

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien