

Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée : 2 heures (La correction voir 😊 <http://www.xriadiat.com>)

Exercice1 : (7 pts) (1pt+1pt+1pt+1,5pt+1pt+1,5pt)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \sin x + 3 \sin^2 x - 4$

- 1) Montrer que f est périodique de période π
- 2) Montrer que : $f(x) = 2 \sin x \times \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
- 3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$
- 4) Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis déduire la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- 5) Résoudre dans $[0, \pi]$: $f(x) = 0$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique
- 6) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$

Exercice2 : (4pts) (1pt+1pt+1pt+1pt)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 \geq 0$ avec : $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

- 1) Étudier f et le signe de $f(x) - x$
- 2) On suppose : $u_0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ Montrer que $u_n \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, puisque (u_n) est croissante.
- 3) On suppose : $u_0 \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée.
- 4) On suppose : $u_0 > \frac{3}{4}$; Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice3 : (9pts) : (1pt×9) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{1 - 4u_n} \\ u_0 = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : -2 < u_n < -\frac{1}{2}$
- 2) a) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{2(2u_n + 1)(u_n + 2)}{4u_n - 1} : \forall n \in \mathbb{N}$
- b) Déduire la monotonie de la suite (u_n)

3) Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k + 2}$

- a) Montrer que : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison q
- b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -2 + \frac{3}{2 + 4 \times 3^n}$
- c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \frac{2}{3}(n + 3^{n+1})$
- 4) a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} + 2 = \frac{3}{1 - 4u_n}(u_n + 2)$
- b) Déduire que : $u_{n+1} + 2 \leq \frac{3}{7}(u_n + 2) : \forall n \in \mathbb{N}$
- c) Montrer que : $0 < u_n + 2 \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n : \forall n \in \mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

