http://www.xriadiat.com **DS3: H** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) (1pt+1pt+1pt)

On pose : $A=\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{3\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}$

1) Monter que : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) Monter que : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) En déduire que : $A=\frac{3}{16}$

Solution : On a : $\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$

1) $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) Déduction : $A=\frac{3}{16}$?

$A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}$

Donc : $A=\frac{3}{16}$

Exercice2 : (3,5pts) : (2pt+1,5pt)

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)$

1) Montrer que : $A(x)$ est un réel constant

2) Résoudre dans $]-\pi,\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

Solution : 1) $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2$

$A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\times\cos^2 x=(\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\times\cos^2 x+(\cos^2 x)^2$

Donc : $A(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=(1)^2=1$

Donc : $A(x)$ est un réel constant

2) Résolvons dans $]-\pi,\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow A(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)$

Puisque : $A(x)=1$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow\sin(2x)=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $]-\pi,\pi[$ on a : $-\pi<\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{4}<k\pi<\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}<k<\frac{3}{4}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-1$ ou $k=0$

Donc : $x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=\frac{-3\pi}{4}$

Donc : $S_{]-\pi,\pi[}=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice3 : (3pts) : (1,5pt+1,5pt) ;Soit $x\in\left]0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$ et on pose : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$

1) Montrer que : $F(x)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin 2x}$

3) En déduire que : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4$

Solution : 1) On a : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$ et on sait que : $\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x\ (1)$

Transformation de: $\cos x-\sqrt{3}\sin x$; $a=1$ et $b=-\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ (2)$

De: (1) et (2) : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=4\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x}$

$F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2\frac{\pi}{18}\right)}=4\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{9}$

Donc : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=4$

Exercice4 : (4pts) : (1pt+1,5pt+1,5pt)

On considère la suite (u_n)définie par : $u_0\in[0,1]$ et : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$;$\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le 1$

2) Montrer que :la suite (u_n)est croissante.

3) On pose : $u_0=\cos\theta$ avec : $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que : $u_n=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le 1$

1étapes : n=0 : $u_0\in[0,1]$ donc : $0\le u_0\le 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0\le u_n\le 1$

3étapes : Montrons alors que : $0\le u_{n+1}\le 1$??

On a : $0\le u_n\le 1\Leftrightarrow 1\le u_n+1\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{u_n+1}{2}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}\le 1\Rightarrow 0\le u_{n+1}\le 1$

Par suite : $0\le u_{n+1}\le 1$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le 1$

2) Montrons que :la suite (u_n)est croissante.

On a : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}-u_n=\frac{\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}{\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n}=\frac{\frac{u_n+1}{2}-(u_n)^2}{\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n}=\frac{-2(u_n)^2+u_n+1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{-2(u_n)^2+u_n+1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}=\frac{-(u_n-1)(2u_n+1)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}=\frac{(1-u_n)(2u_n+1)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}$

Comme : $0\le u_n\le 1$ alors : $\frac{2u_n+1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}+u_n\right)}\ge 0$ et $1-u_n\ge 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n)est croissante.

3) On pose : $u_0=\cos\theta$ avec : $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Montrons par récurrence que : $u_n=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_0=\cos\theta$ *et* $\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right)=\cos\theta$

Donc : la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}=\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$??

On a : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}=\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)+1}{2}}$ et on sait que : $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

Alors : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}=\left|\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right|$ et comme : $0\le\frac{\theta}{2^{n+1}}\le\frac{\pi}{2}$

Donc : $u_{n+1}=\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ par suite: $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n=\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Exercice5 : (3pts) : (0,5pt+1,5pt+1pt)

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de termes strictement négatifs de raison q :

1) Déterminer le signe de q

2) Calculer : u_0 et u_1 si on a : $\begin{cases}u_0+u_1=-10\\u_0\times u_1=16\end{cases}$

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solution : 1) Puisque : $u_n\prec 0$;$\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_{n+1}=qu_n$

Alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\succ 0$

2)Calculons : u_0 et u_1

$\begin{cases}u_0+u_1=-10\\u_0\times u_1=16\end{cases}$

u_0 et u_1 Sont solutions de l'équation suivante : $X^2-sX+p=0$ c'est-à-dire : $X^2+10X+16=0$

Donc : après résolution on trouve : $X_1=-8$ et $X_2=-2$

Deux cas se présentent :

$\rightarrow u_0=-2$ et $u_1=-8$ alors : $q=\frac{u_1}{u_0}=4\succ 0$

Donc : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison : $q=4\succ 0$

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n=u_p\times q^{n-p}\Rightarrow u_n=u_0\times q^{n-0}=-2\times 4^n$

4) Calculons u_n en fonction de n

$\rightarrow u_0=-8$ et $u_1=-2$ alors : $q=\frac{u_1}{u_0}=\frac{1}{4}\succ 0$

Donc : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}\succ 0$

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n=u_p\times q^{n-p}\Rightarrow u_n=u_0\times q^{n-0}=-8\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice6 : (3,5pts) : (1pt+1pt+0,5pt+0,5pt+0,5pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n-25}{u_n-3}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\\u_0=2\end{cases}$

1) Montrer que : $u_n\ne 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-5}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n-25}{u_n-3}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\\u_0=2\end{cases}$

1) Montrons que : $u_n\ne 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=2\ne 5$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\ne 5$

Montrons que : $u_{n+1}\ne 5$?

$u_{n+1}-5=\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5=\frac{2(u_n-5)}{u_n-3}$ et comme : $u_n\ne 5$ c'est-à-dire : $u_n-5\ne 0$ alors ; $u_{n+1}-5\ne 0$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n\ne 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-5}=\frac{1}{\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5}=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}-\frac{1}{u_n-5}=\frac{u_n-5}{2(u_n-5)}=\frac{1}{2}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=\frac{1}{2-5}=-\frac{1}{3}$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=-\frac{1}{3}$

Donc : $v_n=v_0+nr=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n$

4) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-5}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+5$

Donc : $u_n=\frac{5v_n+1}{v_n}=\frac{5\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\right)+1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n}=\frac{15n-4}{3n-2}$

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$; Calculons : S_n en fonction de n

$S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=n\frac{v_0+v_{n-1}}{2}$

On a : $v_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}$

Donc : $S_n=n\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}}{2}=n\frac{\frac{1}{2}n-\frac{7}{6}}{2}=\frac{n(3n-7)}{12}$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien