http://www.xriadiat.com **DS3: F** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Montrer que : 1) $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sin\alpha\neq-1$ alors : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Solution :1) On a : $1-\cos x+\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Car : $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) On a : $1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice2 : (3pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Calculer : 1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Solution :1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice3 : $(1,5\text{pt})$ Linéariser : $2\cos^2 x\times\sin 2x$

Solution :1) $2\cos^2 x\times\sin 2x=2\frac{1+\cos 2x}{2}\times\sin 2x=(1+\cos 2x)\times\sin 2x=\sin 2x+\sin 2x\cos 2x$

Donc : $2\cos^2 x\times\sin 2x=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x$

Exercice4 : $(1,5\text{pts})$: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=3n^2+6n-4$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n=3n^2+6n-4=3(n^2+2n)-4=3\left((n+1)^2-1\right)-4$

Donc : $u_n=3(n+1)^2-7$

On a : $(n+1)^2\geq 0 : \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $3(n+1)^2\geq 0$ c'est-à-dire : $(n+1)^2-7\geq -7$

Donc : $u_n\geq -7$ par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -7

Exercice5 : (7pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2\\ v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}u_n & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=-3\ ;\ v_0=0\end{cases}$

1) Calculer : u_1 ; v_1 u_2 ; et v_2

2) Montrer que : $u_n\geq -4$: $\forall n\in\mathbb{N}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3) On pose : $a_n=u_n+4$ et $b_n=v_n-u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme et écrire a_n en fonction de n

b) Montrer que : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont en déterminera la raison et le premier terme et écrire b_n en fonction de n

c) En déduire : u_n et v_n en fonction de n

d) Montrer que : $v_n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution :1) On a : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $u_{0+1}=\frac{1}{2}u_0-2\Rightarrow u_1=\frac{1}{2}u_0-2\Rightarrow\boxed{u_1=-\frac{7}{2}}$

On a : $v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $v_{0+1}=v_0-\frac{1}{2}u_0\Rightarrow v_1=v_0-\frac{1}{2}u_0\Rightarrow\boxed{v_1=\frac{3}{2}}$

Pour n=1 : $u_{1+1}=\frac{1}{2}u_1-2\Rightarrow u_2=\frac{1}{2}u_2-2\Rightarrow\boxed{u_2=-\frac{15}{4}}$

Pour n=1 : $v_{1+1}=v_1-\frac{1}{2}u_1\Rightarrow v_2=v_1-\frac{1}{2}u_1\Rightarrow\boxed{v_2=\frac{13}{4}}$

2) a) Montrons par récurrence que : $u_n\geq -4$: $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_0=-3\geq -4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\geq -4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\geq -4$??

On a : $u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}u_n+2=\frac{1}{2}(u_n+4)$ et comme : $u_n+4\geq 0$

Alors : $u_{n+1}+4\geq 0$

Donc : $u_{n+1}\geq -4$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq -4$

b) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-2-u_n=-\frac{1}{2}(u_n+4)$ et comme : $u_n+4\geq 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\leq 0$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3) On pose : $a_n=u_n+4$ et $b_n=v_n-u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

Soit : $n\in\mathbb{N}$; On a : $a_n=u_n+4$

$a_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}(u_n+4)=\frac{1}{2}a_n$

Par suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme

$a_0=u_0+4=-3+4=1$

Ecrions a_n en fonction de n : comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0=1$ alors : $a_n=a_0\times q^n\Leftrightarrow\boxed{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

b) Montrons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

Soit : $n\in\mathbb{N}$; On a : $b_n=v_n-u_n$

$b_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\left(v_n-\frac{1}{2}u_n\right)-\left(\frac{1}{2}u_n-2\right)=v_n-u_n-2=b_n-2$

Donc : $b_{n+1}-b_n=2$

Par suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison : $r=2$ et de premier terme $b_0=v_0-u_0=3$

Ecrions b_n en fonction de n : comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison : $r=2$ et de premier terme $b_0=3$ alors : $b_n=b_0+n\times r\Leftrightarrow\boxed{b_n=3+2n}$

c) Déduisons : u_n et v_n en fonction de n

On a : $\begin{cases}a_n=u_n+4\\ b_n=v_n-u_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_n-4=u_n\\ b_n+u_n=v_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_n=a_n-4\\ v_n=b_n+a_n-4\end{cases}$

Donc : $\boxed{\begin{cases}u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\\ v_n=2n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\end{cases}}$

d) Montrons que : $v_n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: $\Rightarrow n\geq 1$ $et\left(\frac{1}{2}\right)^n\succ 0\Rightarrow 2n\geq 2$ $et\left(\frac{1}{2}\right)^n\succ 0\Rightarrow n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\succ 0\Rightarrow 2n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\succ n$

Donc : $v_n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice6: (4pts) : $(1,5\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases}$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) Montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

Donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\prec\frac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

Et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\frac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

Donc : $-1\prec\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$ donc $-1\prec u_{n+1}\prec 0$

D'où : $-1\prec u_n\prec 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante :

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$ et puisque : $1-\sqrt{u_n+2}\prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\geq u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n}\geq\sqrt{2+u_0}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$ et puisque : $u_n\prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\succ u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ donc : $0\leq -u_{n+1}\leq\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0\leq -u_1\leq\frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_2\leq\frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0\leq -u_{n-1}\leq\frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_n\leq\frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne : $0\prec -u_n\leq\frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$ et donc : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien