http://www.xriadiat.com **DS3: E** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(6{,}5\text{pts})$: $(2{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Calculer : $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) En déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations : $A(x)=\frac{1}{2}$

b) Résoudre dans I l'inéquation : $A(x)\le\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

2) $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos^3 x-3\cos x-3\sin x+3(\sin x+\cos x)=4\cos^3 x$

3)a) $A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\cos^3 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos^3 x-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)=0$

Car : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0\\ X=\cos x\end{cases}$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

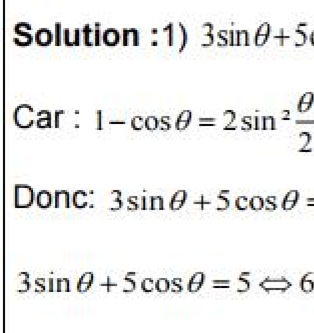
$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)\le 0$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors : $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\succ 0$

Donc : $A(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\le\cos\frac{\pi}{3}$



Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice2 : $(3{,}5\text{pts})$: $(2{,}5\text{pt}+1\text{pt})$ Soit : $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta=5$

1) Monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta=3$

2) Déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=5-5\cos\theta\Leftrightarrow 3\sin\theta=5(1-\cos\theta)\Leftrightarrow 3\sin\theta=5\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Car : $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=10\sin^2\frac{\theta}{2}$ Car : $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$ car $\sin\frac{\theta}{2}\ne 0$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\dfrac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\dfrac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}-\dfrac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}}=\frac{102}{34}=3$

2) On a le système : $\begin{cases}3\sin\theta+5\cos\theta=5\\ 5\sin\theta-3\cos\theta=3\end{cases}$ on le résolvant on trouve : $\cos\theta=\frac{8}{17}$ et $\sin\theta=\frac{15}{10}$

Exercice3 : (5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}\quad\forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=3\end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$u_{n+1}-2=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\dfrac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\dfrac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

Donc : $2\le u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4\quad\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$4-u_{n+1}=4-\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\dfrac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\dfrac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\dfrac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a : $u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\dfrac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$ Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice4 : (5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt})$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{12u_n}{9+u_n^4}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Soit la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{12x}{9+x^4}$

On suppose que : f est croissante sur $\left[-\sqrt{\sqrt{3}};\sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et f est décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\sqrt{3}};+\infty\right[$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2) On pose : $v_n=\dfrac{u_n}{n!}+\sqrt{\sqrt{3}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\dfrac{2}{9+u_n^4}\le\dfrac{1}{5}$ et en déduire La monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution : On a : $u_1=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{12u_n}{9+u_n^4}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$?

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

n=1 $u_1=1$ donc : $1\le u_1\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Supposons que : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Montrons que : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}$

On a : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$ et puisque : f est croissante sur : $I=\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

On a : $f(1)\le f(u_n)\le f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)$ donc $\frac{6}{5}\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Donc : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{12u_n}{9+u_n^4}-u_n=u_n\left(\dfrac{12}{9+u_n^4}-1\right)=u_n\left(\dfrac{3-u_n^4}{9+u_n^4}\right)$ et puisque : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Donc : $0\prec u_n$ et $3-u_n^4\ge 0$ et $9+u_n^4\succ 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

2) $v_n=\dfrac{u_n}{n!}+\sqrt{\sqrt{3}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

a) Vérifions que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\dfrac{2}{9+u_n^4}\le\dfrac{1}{5}$?

On a : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ donc : $1^4\le u_n^4\le\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4$ donc : $1\le u_n^4\le 3$

Donc : $10\le u_n^4+9$ par suite : $\dfrac{2}{9+u_n^4}\le\dfrac{1}{5}$

Déduction de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!}-\dfrac{u_n}{n!}=\dfrac{u_{n+1}}{n!(n+1)}-\dfrac{u_n}{n!}=\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)}-u_n\right)=\dfrac{1}{n!}u_n\left(\dfrac{12}{(n+1)(9+u_n^4)}-1\right)$

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n}{(n+1)!}\left(\dfrac{12}{9+u_n^4}-(n+1)\right)$ et puisque : $\dfrac{u_n}{(n+1)!}\succ 0$ et $\dfrac{12}{9+u_n^4}\le\dfrac{6}{5}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le\dfrac{u_n}{(n+1)!}\left(-n+\dfrac{1}{5}\right)$ et puisque : $-n+\dfrac{1}{5}\le 0\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le 0$ donc : (v_n) est décroissante.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien