http://www.xriadiat.com **DS3:D** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(2\text{pt}+1\text{pt})$ 1) Calculer les expressions suivantes :

$A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$; $B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$

2) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

Solution :1) On sait que : $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ (1)

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ (2)

Donc: $A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{-a^3}$

2) Montrons que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

$\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{18}\right)$

Donc: $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Exercice2 : (2pts) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$; $a=\sqrt{3}$ et $b=1$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Après encadrement dans : $[0;2\pi]$ On trouve : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercice3 : (5pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2{,}5\text{pt})$

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

1) Calculer : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

Solution : 1) On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2$

Donc : $\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2}$

2) Montrons que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

On sait que : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $f(x)=2\cos^2 x-1+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

D'autre part : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=1-\cos^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

Alors : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ ou $\sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=0$ ou $2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x=0$ ou $2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice4 : $(3{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrer que : la suite (u_n) est majorée par 1

3) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Solutions : 1) Montrons que $0\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $0\le u_0$ car : $0\le 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $0\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\le u_{n+1}$??

On a : $0\le u_n$ donc : $0\le u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$

Donc : $1\le u_{n+1}$

Donc : $0\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrons que : $u_n\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 1$ car : $1\le 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $u_n\le 1$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 1$??

On a : $u_n\le 1$ donc : $u_n+1\le 2\Rightarrow\frac{u_n+1}{2}\le 1\Rightarrow\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}\le\sqrt{1}\Rightarrow u_{n+1}\le 1$

Donc : $u_{n+1}\le 1$

Donc : : $u_n\le 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est majorée par 1

3) la suite (u_n) est majorée par 1 et minorée par 0 donc (u_n) est bornée

Exercice5 : $(6{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

1) On pose : $f(x)=\frac{x^2}{1-2x^2}$: $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrer que : $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$; $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et $a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1}=\frac{u_n^{\,2}}{1-2u_n^{\,2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

Solution :1) a) Montrons que : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

On pose : $f(x)=\frac{x^2}{1-2x^2}$: $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Soient : $x_1\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_2\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_1\prec x_2$

$0\le x_1\prec x_2\Rightarrow(x_1)^2\prec(x_2)^2\Rightarrow-2(x_1)^2+1\succ-2(x_2)^2+1\Rightarrow\frac{1}{1-2(x_1)^2}\prec\frac{1}{1-2(x_2)^2}\Rightarrow-1+\frac{1}{1-2(x_1)^2}\prec-1+\frac{1}{1-2(x_2)^2}$

$0\le x_1\prec x_2\Rightarrow f(x_1)\prec f(x_2)$

Donc : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrons que : $\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$; $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

$\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\Rightarrow 0\prec x\prec\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)\prec f(x)\prec f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on a : $f(0)=\frac{0^2}{1-2\times 0^2}=0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

Donc : $\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$: $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et $a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1}=\frac{u_n^{\,2}}{1-2u_n^{\,2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

1étapes : n=0 : $u_0=a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$ donc : $0\prec u_0\prec\frac{1}{4}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

3étapes : Montrons alors que : $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{4}$??

On a : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$ et comme f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f(0)\prec f(u_n)\prec f\left(\frac{1}{4}\right)$

Donc : $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{14}\prec\frac{1}{4}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^{\,2}}{1-2u_n^{\,2}}-u_n=u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^{\,2}}-1\right)=\frac{2u_n(u_n+1)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{1-2u_n^{\,2}}$

et comme : $0\prec u_n$ et $0\prec u_n+1$ et $0\prec 1-2u_n^{\,2}$ et $u_n-\frac{1}{2}\prec 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\prec 0$ Par conséquent (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-\frac{2}{7}=\frac{u_n^{\,2}}{1-2u_n^{\,2}}-\frac{2}{7}=\frac{7u_n^{\,2}-2+4u_n^{\,2}}{7(1-2u_n^{\,2})}=\frac{11u_n^{\,2}-2}{7(1-2u_n^{\,2})}$

et comme : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$ alors : $11u_n^{\,2}-2\prec 0$ et $0\prec 7(1-2u_n^{\,2})$ donc : $\frac{11u_n^{\,2}-2}{7(1-2u_n^{\,2})}\prec 0$

Donc : $u_{n+1}-\frac{2}{7}\prec 0$ par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien