

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée : 2 heures

Exercice1 : (5pts) : (2pt+1pt+1pt+1pt)

Soit $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1) Montrer que : $\cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)}$

2) Calculer : a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Solution : 1) Soit $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Montrons que : $\cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)}$

C'est-à-dire on montre que : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \sin(8x)$

On a : $\sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \times \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = 8 \times \frac{1}{2} \sin(2x) \times \cos(2x) \times \cos(4x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(2x) \times \cos(2x) \times \cos(4x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = 8 \times \frac{1}{4} \sin(4x) \times \cos(4x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin(4x) \times \cos(4x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = 8 \times \frac{1}{8} \sin(8x)$

Alors : $8 \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \sin(8x)$

Par suite : $\cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)}$ si $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) Calculons : a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

<http://www.xriadiat.com/>

PROF: ATMANI NAJIB

1

On sait que : $\cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x) = \frac{\sin(8x)}{8 \sin(x)}$ si $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Pour : $x = \frac{\pi}{7}$ On a :

$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \left[-\frac{1}{8}\right]$

Calculons : b) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

Pour : $x = \frac{\pi}{9}$ On a :

$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \left[\frac{1}{8}\right]$

Calculons : c) $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) \times \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{18}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}\right)$

$= \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \left[\frac{1}{8}\right]$

Exercice2 : (5pts) : (1,5pt+1,5pt+2pt)

Soit $x \in \mathbb{R}$ on pose : $A(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : A(x) = 2(2 \cos x - \sqrt{3}) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $A(x) = 0$

3) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation : $A(x) > 0$

Solution : 1) On a : $A(x) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$

On a : $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

$2(2 \cos x - \sqrt{3}) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2(2 \cos x - \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)$

$= (2 \cos x - \sqrt{3})(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 2 \cos x \sin x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x$

$= \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x + 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = A(x)$

Donc : $A(x) = 2(2 \cos x - \sqrt{3}) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

<http://www.xriadiat.com/>

PROF: ATMANI NAJIB

2

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $A(x) = 0$

$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2(2 \cos x - \sqrt{3}) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ ou $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ ou $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{3} = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S_A = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

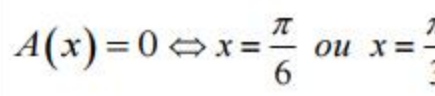
3) Résolvons dans $[0, \pi]$ l'inéquation : $A(x) > 0$

Résolvons d'abord dans $[0, \pi]$ l'équation : $A(x) = 0$

$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0, \pi]$

$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$;

$\rightarrow 2 \cos x - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$



$\rightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = X \begin{cases} \sin(X) > 0 \\ X \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow X \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

Tableau de signe :

<http://www.xriadiat.com/>

PROF: ATMANI NAJIB

3

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$2 \cos x - \sqrt{3}$	+	0	-	-
$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	-	-	0	+
$A(x)$	-	0	+	-

Donc : $S = \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$

Exercice3 : (5,5pts) : (1,5pt+1pt+1,5pt+1,5pt)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et : $u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} ; \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b) Dédire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$

1étapes : $n=0 : u_0 = 1$ et $u_0 > 0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2étapes : Supposons que : $u_n \geq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \geq 0$??

On a : $u_n \geq 0$ Donc : $2u_n^3 \geq 0$ et $3u_n^2 + 1 > 0$ Donc : $\frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \geq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0$

Donc : la suite (u_n) est minorée par 0

b) Etudions la monotonie de la suite (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} - u_n = \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = \frac{-(u_n^3 + u_n)}{3u_n^2 + 1} \leq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ par suite : la suite (u_n) est décroissante

2) a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

$u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} - \frac{1}{2} u_n = \frac{4u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{2(3u_n^2 + 1)} = \frac{u_n^3 - u_n}{2(3u_n^2 + 1)} = \frac{u_n(u_n^2 - 1)}{2(3u_n^2 + 1)}$

et comme la suite (u_n) est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_0$

Donc : $u_n \leq 1$ et on a : $3u_n^2 + 1 > 0$ et $u_n + 1 > 0$ et $u_n \geq 0$ et $u_n - 1 < 0$

Donc : $u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \leq 0$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

<http://www.xriadiat.com/>

PROF: ATMANI NAJIB

4

b) Dédire que : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1étapes : $n=0 : u_0 = 1$ et comme : $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2étapes : Supposons que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$??

On a : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc : $u_n \times \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ donc : $\frac{u_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice4 : (4,5pts) : (1,5pt+1pt+1pt+1pt)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2 ; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - \frac{1}{3^n} ; \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Ecrire v_n et u_n en fonction de n

c) Calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}} ; \forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : $n=0 : u_1 = \frac{1}{9} u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

2étapes : Supposons que : $u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} = \frac{1}{9} u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$??

<http://www.xriadiat.com/>

PROF: ATMANI NAJIB

5

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n = 9 \left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}} \right)$ et on a : $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$u_{n+2} = \frac{1}{27} \left(12u_{n+1} - 9 \left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}} \right) \right) = \frac{1}{27} \left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n} \right)$

Donc : $u_{n+2} = \frac{1}{9} u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2) a) On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$ donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9} u_n - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9} \left(u_n - \frac{1}{3^n} \right)$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9} v_n$ par suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{9}$

et de premier terme $v_0 = 1$

2) b) Ecriture de v_n et u_n en fonction de n :

On a : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N}$ et Puisque : $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$ donc $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$??

$u_n = v_n + w_n$ Avec $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison : $q = \frac{1}{9}$ et $q' = \frac{1}{3}$

Donc : $s_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_k + \sum_{k=0}^n w_k$

$s_n = \sum_{k=0}^n u_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} + w_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right)$

$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



<http://www.xriadiat.com/>