http://www.xriadiat.com **DS3: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (3 pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

1) Soit $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ tel que : $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; Calculer : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

2) Soit $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ Tel que : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Montrer : $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$

Solution :1) On a : $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

On sait que : $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\times -\frac{12}{13} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{6}{13}$

Calculons : $\cos\alpha$

On sait que : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ donc : $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

Donc : $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ ou $\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$ et puisque : $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ alors : $\cos\alpha = \frac{5}{13} > 0$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{13}+\frac{6}{13} = \frac{5\sqrt{3}+12}{26}$

2) Soit $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ Tel que : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Montrer : $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$

On sait que : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Calculons : $\cos\alpha$ et $\cos\beta$

Puisque : $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

On sait que : $\cos^2\beta+\sin^2\beta = 1$ donc : $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Donc : $\cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ou $\cos\beta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ et puisque : $\beta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Donc : $\cos(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ comme : $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $0<\alpha+\beta<\pi$

Alors : $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$0<\frac{\pi}{4}+2k\pi<\pi \Leftrightarrow 0<\frac{1}{4}+2k<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}<k<\frac{3}{8} \Rightarrow k=0$

Donc : $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}+2\times0\times\pi = \frac{\pi}{4}$

Exercice2 : (6pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $a = \cos x+\cos 3x$ et $b = \sin x+\sin 3x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2 = 4\cos^2(2x)$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a = 2\cos x\times\cos 2x$ et $b = -2\sin 2x\times\cos x$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b = 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x = 0$

4) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x < 0$

Solution : 1) a) →Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2 = 4\cos^2(2x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $a = \cos x+\cos 3x$ et $b = \sin x+\sin 3x$

Donc : $a^2 = (\cos x+\cos 3x)^2 = \cos^2 x+\cos^2 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $b^2 = (\sin x+\sin 3x)^2 = \sin^2 x+\sin^2 3x+2\sin x\times\sin 3x$

Par suite : $a^2+b^2 = 1+1+2\sin x\times\sin 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $a^2+b^2 = 2+2(\cos x\times\cos 3x+\sin x\times\sin 3x) = 2+2\cos(x+3x) = 2+2\cos(4x)$

Donc : $a^2+b^2 = 2+2\cos(2(2x)) = 2+2(2\cos^2(2x)-1) = 4\cos^2(2x)$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2 = 4\cos^2(2x)$

2) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a = 2\cos x\times\cos 2x$ et $b = -2\sin 2x\times\cos x$

On a : $a = \cos x+\cos 3x = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(-x) = 2\cos x\cos(2x)$

On a : $b = \sin x+\sin 3x = 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\sin(2x)\cos(-x) = 2\cos x\sin(2x)$

b) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b = 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$a+b = 2\cos x\cos(2x)+2\sin(2x)\cos x = 2\cos x(\cos(2x)+\sin(2x))$

$a+b = 2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right) = 2\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos(2x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(2x)\right) = 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x = 0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x = 0 \Leftrightarrow a+b = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \; ou \; \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \; ou \; 2x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi \; ou \; x = \frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \quad ; k\in\mathbb{Z}$

$0 \le \frac{\pi}{2}+k\pi \le \pi \Leftrightarrow -0,5 \le k \le 0,5 \Rightarrow k=0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$0 \le \frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \le \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \le \frac{k\pi}{2} \le \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{5}{4} \Rightarrow k=0 \; ou k=1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{8}} \; ou \; \boxed{x = \frac{7\pi}{8}}$

Donc : $S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{8}\right\}$

4) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x < 0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x < 0 \Leftrightarrow a+b < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases}\cos x > 0\\ x\in[0;\pi]\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) > 0\\ x\in[0;\pi]\end{cases} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3} = X : \begin{cases}\cos(X) > 0\\ X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]\end{cases} \Leftrightarrow X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) > 0\\ x\in[0;\pi]\end{cases} \Leftrightarrow X+\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right] \Leftrightarrow 2x\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right] \Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$\cos x$		+		+	0	−		−	
$\cos(2x-\frac{\pi}{4})$		+	0	−		−	0	+	
$a+b$		+	0	−	0	+	0	−	

Donc : $S = \left]\frac{7\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Exercice3 : (3pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0 = 1\\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n+1}\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : 0 \le u_n \le 3$

1étapes : n=0 on a : $0 \le u_0 \le 3$ car $0<1<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0 \le u_n \le 3$

3étapes : Montrons alors que : $0 \le u_{n+1} \le 3$??

On a : $0 \le u_n$ donc $0 \le 2u_n+1$ et $0 \le 7u_n$

Donc $0 \le u_{n+1}$ (1) et on a : $u_{n+1}-3 = \frac{7u_n}{2u_n+1}-3 = \frac{7u_n-3(2u_n+1)}{2u_n+1}$

$u_{n+1}-3 = \frac{u_n-3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0 \le u_n \le 3$

On a donc : $u_n-3 \le 0$ et $0 \le 2u_n+1$

Donc : $u_{n+1}-3 \le 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \le 3$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $0 \le u_{n+1} \le 3$

D'où $\forall n\in\mathbb{N} \quad : 0 \le u_n \le 3$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Exercice4 : (2pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt})$: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0 = 3\\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n-1}\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 ; u_2

2) Déterminer u_{n+2} en fonction de u_n et que peut-on déduire ?

Solution :1) Pour n=0 on a: $u_{0+1} = \frac{u_0}{u_0-1} = \frac{3}{3-1} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{3}{2}}$

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = \frac{u_1}{u_1-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow \boxed{u_2 = 3}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{u_n}{u_n-1}}{\frac{u_n}{u_n-1}-1} = \frac{u_n}{u_n-u_n+1} = u_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N} \; u_{n+2} = u_n$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T = 2$

Exercice5 : (6pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) On pose : $\alpha_n = u_{2n+1}$ et $\beta_n = u_{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n \le \beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : ($\forall n \in \mathbb{N}$) $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

4) Montrer que : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution :1) Soit : $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que : $x_1 \le x_2$

$x_1 \le x_2 \Rightarrow x_1+1 \le x_2+1 \Rightarrow \frac{1}{x_1+1} \ge \frac{1}{x_2+1} \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2) On a : $\alpha_n = u_{2n+1}$ et $\beta_n = u_{2n}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1} = (f\circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1} = (f\circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ alors : $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a) Montrons que : $\alpha_n \le \alpha_n+1$ et $\beta_{n+1} \le \beta_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0 = \frac{1}{2} \le \alpha_1 = \frac{3}{5}$ et $\beta_1 = \frac{2}{3} \le \beta_0 = 1$

On suppose que : $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \le \beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1} \le \alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2} \le \beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \le \beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

Alors : $(f\circ f)(\alpha_n) \le (f\circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f\circ f)(\beta_{n+1}) \le (f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1} \le \alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2} \le \beta_{n+1}$

Donc : $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \le \beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n \le \beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = 1$ donc : $\alpha_0 \le \beta_0$

On suppose que : $\alpha_n \le \beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1} \le \beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n \le \beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors : $(f\circ f)(\alpha_n) \le (f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1} \le \beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n \le \beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons que : ($\forall n \in \mathbb{N}$) ; $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

Puisque : $\alpha_0 \le \alpha_n \le \beta_n \le \beta_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Donc : $\frac{1}{2} \le u_{2n+1} \le u_{2n} \le 1$

Donc : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

4) Montrons que : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n=1 on a : $|u_2-u_1| = \frac{1}{6}$ donc : $|u_2-u_1| \le \frac{1}{1}$

On suppose que : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$

Montrons que : $|u_{n+2}-u_{n+1}| \le \frac{1}{n+1}$?

On a : $|u_{n+2}-u_{n+1}| = \left|\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}\right| = \frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ et $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$ donc : $\frac{3}{2} \le 1+u_n \le 2$ et $\frac{3}{2} \le 1+u_{n+1} \le 2$

Donc : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_{n+1}+1} \le \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \le \frac{1}{u_n+1} \le \frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \le \frac{4}{9}$ et $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n| \le \frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1}-\frac{4}{9n} = \frac{5n-4}{9n(n+1)} \succ 0$ donc : $\frac{4}{9n} \prec \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2}-u_{n+1}| \le \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+1}-u_n| \le \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien