1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(3{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

1) Vérifier que : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

2)a) Monter que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

b) En déduire les valeurs de : $\cos\frac{\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{\pi}{10}$

3) Monter que : $\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$ (on remarquera que : $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$

Solution : 1) Vérifions que : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

On a : $\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}$

Donc : $\cos\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)=\sin\frac{2\pi}{10}$

2)a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

$\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos(x)\times\cos(2x)-\sin(x)\times\sin(2x)\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

Comme on a : $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $\cos 3=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x\right)-2\sin^2 x\cos x=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x\right)=\cos x\times\left(1-4\sin^2 x\right)$

b) Déduisons les valeurs de : $\cos\frac{\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{\pi}{10}$

On sait que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$ donc pour : $x=\frac{\pi}{10}$

$\cos\frac{3\pi}{10}=\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}$ et on a : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

Donc : $\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}\Leftrightarrow\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$ car : $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 1-4\sin^2\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}$ car $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ On : $\Delta=b^2-4ac=4$

Donc : $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ or $0\prec\frac{\pi}{10}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{10}>0$

Donc : $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$ C'est-à-dire : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=-\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $0\prec\frac{\pi}{10}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)>0$

Par suite : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

3) Montrons que : $\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$

On a: $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$

$\sin\frac{7\pi}{30}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$\sin\frac{7\pi}{30}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$

Exercice2 : $(5{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=2\cos^3 x-\cos x+2\sin x-2\sin^3 x$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $\sin x-\sin^3 x=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x$ et $2\cos^3 x-\cos x=\cos 2x\times\cos x$

b) En déduire que : $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

3) Montrer que : $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$: $A(x)\geq 0$

Solution : 1) a) →Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $\sin x-\sin^3 x=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x$

On sait que : $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$

$\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x=\frac{1}{2}2\sin x\times\cos x\times\cos x=\sin x\times\cos^2 x=\sin x\times\left(1-\sin^2 x\right)=\sin x-\sin^3 x$

→Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2\cos^3 x-\cos x=\cos 2x\times\cos x$

On sait que : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\cos 2x\times\cos x=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x=2\cos^3 x-\cos x$

b) Déduisons que : $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$

On a : $A(x)=2\cos^3 x-\cos x+2\sin x-2\sin^3 x$

Donc : $A(x)=\cos 2x\times\cos x+2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x\right)$

Donc : $A(x)=\cos 2x\times\cos x+\sin 2x\times\cos x$

Donc : $A(x)=\cos x\left(\cos 2x+\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)=\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

$A(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos x\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=0\Leftrightarrow\cos x=0\ ou\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ou\ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ou\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) Montrons que : $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$: $A(x)\geq 0$

On a : $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$

Comme : $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\cos x>0$

Et $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]\subset\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Alors : $\cos x>0$ (1) : $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

Soit : $x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow 2x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow cox\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow A(X)\geq 0$ $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

Exercice3 : (3pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\frac{1+u_n}{1-u_n}\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T=4$

2) Calculer : u_{2024} ; u_{2025}

Solution : 1) Soit : $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=\frac{1+u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\frac{1+\frac{1+u_n}{1-u_n}}{1-\frac{1+u_n}{1-u_n}}=-\frac{1}{u_n}$

Donc : $u_{n+3}=\frac{1+u_{n+2}}{1-u_{n+2}}=\frac{1-\frac{1}{u_n}}{1+\frac{1}{u_n}}=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

Donc : $u_{n+4}=\frac{1+u_{n+3}}{1-u_{n+3}}=\frac{1+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\frac{u_n-1}{u_n+1}}=\frac{2u_n}{2}=u_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+4}=u_n$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T=4$

2) $u_{2024}=u_{506\times 4+0}=u_0=3$

Donc : $\boxed{u_{2024}=3}$

$u_{2025}=u_{506\times 4+1}=u_1$

Pour n=0 on a : $u_{0+1}=\frac{1+u_0}{1-u_0}=\frac{1+2}{1-2}\Rightarrow\boxed{u_1=-3}$

Donc : $\boxed{u_{2025}=-3}$

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer les 3 premiers termes.
2) Montrer que la suite est minorée par 0
3) Montrer que la suite est majorée par 2
4) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :1) on a $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$

Pour n=0 on a : $u_1=\sqrt{u_0+2}$ donc $u_1=\sqrt{2}$

Pour n=1 on a : $u_2=\sqrt{u_1+2}$ donc $u_2=\sqrt{\sqrt{2}+2}$

Pour n=2 on a : $u_3=\sqrt{u_2+2}$ donc $u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $0\leq u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que : $0\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\leq u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\geq 0$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n$

Donc : La suite est minorée par 0 car $0\leq u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq 2$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $u_0\leq 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

Supposons que : $u_n\leq 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 2$??

On a : $u_n\leq 2$ donc $u_n+2\leq 4\Rightarrow\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{4}\Rightarrow u_{n+1}\leq 2$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n$

4) On a $u_n\leq 2$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $0\leq u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n\leq 2$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

5)Montrons par récurrence que $u_n\leq u_{n+1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : on a $u_1=\sqrt{u_0+2}=\sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc : $u_0\leq u_1$.

Donc : la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\leq u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq u_{n+2}$??

On a : $u_n\leq u_{n+1}$ donc $u_n+2\leq u_{n+1}+2$ donc : $\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{u_{n+1}+2}$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\leq u_{n+2}$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq u_{n+1}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice5 : (4pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0$ et : $u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\leq u_n\leq 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3)a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $4-u_n\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n\leq 4$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $0\leq u_0\leq 4$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence

Supposons que : $0\leq u_n\leq 4$

3étapes : Montrons alors que : $0\leq u_{n+1}\leq 4$??

On a : $0\leq u_n\leq 4\Rightarrow 0\leq 3u_n\leq 12\Rightarrow 4\leq 3u_n+4\leq 16\Rightarrow\sqrt{4}\leq\sqrt{3u_n+4}\leq\sqrt{16}\Rightarrow 2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4\Rightarrow 2\leq u_{n+1}\leq 4$

Donc : D'après le principe de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\leq u_n\leq 4$

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{3u_n+4}-u_n=\frac{\left(\sqrt{3u_n+4}-u_n\right)\left(\sqrt{3u_n+4}+u_n\right)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{-u_n^2+3u_n+4}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ un est celui de : $-u_n^2+3u_n+4$ car $\sqrt{3u_n+4}+u_n\succ 0$ en effet $(0\leq u_n)$

Étudions le signe du trinôme : $-x^2+3x+4$: $\Delta=b^2-4ac=9+16=25\succ 0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{25}}{-2}=\frac{-3+5}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{25}}{-2}=\frac{-3-5}{-2}=4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-4)(u_n-(-1))}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\frac{-(u_n-4)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$ et puisque : $0\leq u_n\leq 4$

Alors : $(u_n-4)(u_n+1)\leq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n\geq 0$

Par suite : la suite (u_n) est croissante.

Remarque : methode2

Le tableau de signe du trinôme : $-x^2+3x+4$ est le suivant :

X	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-X^2+3X+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	

et puisque : $0\leq u_n\leq 4$ alors : $-u_n^2+3u_n+4\geq 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

3)b) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

Soit $n\in\mathbb{N}$: $4-u_{n+1}=4-\sqrt{3u_n+4}=\frac{\left(4-\sqrt{3u_n+4}\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{16-3u_n-4}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$

Donc : $4-u_{n+1}=\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n)$

On a : $0\leq u_n\leq 4\Rightarrow 0\leq 3u_n\leq 12\Rightarrow 4\leq 3u_n+4\leq 16\Rightarrow\sqrt{4}\leq\sqrt{3u_n+4}\leq\sqrt{16}\Rightarrow 2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4\Rightarrow 6\leq\sqrt{3u_n+4}+4\leq 8$

$\Rightarrow\frac{1}{8}\leq\frac{1}{\sqrt{3u_n+4}+4}\leq\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{3}{8}\leq\frac{3}{\sqrt{3u_n+4}+4}\leq\frac{1}{2}$ Alors : $\frac{3}{8}(4-u_n)\leq\frac{3(4-u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+4}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$ car $0\leq u_n\leq 4$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

b) Déduisons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $4-u_n\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4-u_0=4$ et $4\left(\frac{1}{2}\right)^0=4\times 1=4$ donc $4-u_0\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $4-u_n\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3étapes : Montrons alors que : $4-u_{n+1}\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$??

On a : $4-u_n\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{2}(4-u_n)\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}(4-u_n)\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme : $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

Alors : $4-u_{n+1}\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Donc : D'après le principe de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$: $4-u_{n+1}\leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien