http://www.xriadiat.com **DS2 : R** PROF : ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Durée :2 heures

Exercice1 : (6,5pts) : $(2\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

On considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$; g est-elle surjective ?

2) a) Montrer que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Déduire que g est injective

3) Montrer que : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$ et déterminer sa réciproque

Solution :1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $g(x)-1=\sqrt{x^2+2x+2}-x-1=\sqrt{x^2+2x+1+1}-(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)$

Or : $\sqrt{(x+1)^2+1}>\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

Donc : $g(x)-1>|x+1|-(x+1)$

Donc : $g(x)-1>|x+1|-(x+1)\geq 0$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$

Donc : si $x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>1$

Donc : $g(\mathbb{R})\subset]1;+\infty[$

Par exemple : $0\notin]1;+\infty[$ et n'a pas d'antécédents par f

Donc : g est non surjective

2) a) Montrons que : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x)-g(y)=\sqrt{x^2+2x+2}-x-\sqrt{y^2+2y+2}+y=\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{x^2+2x+2-y^2-2y-2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=\frac{(x-y)(x+y)+2(x-y)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-(x-y)$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}-1\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{x+y+2-\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{y^2+2y+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

$$g(x)-g(y)=(x-y)\left[\frac{2-\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)-\left(\sqrt{y^2+2y+2}-y\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}\right]$$

Donc : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}$

b) Déduisons que g est injective :

Soit $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:tel que : $g(x)=g(y)$

$$\Rightarrow g(x)-g(y)=0\Rightarrow\frac{(x-y)(2-g(x)-g(y))}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{y^2+2y+2}}=0\Rightarrow x-y=0\ ou\ 2-g(x)-g(y)=0$$

Or : $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)>1$ donc : $g(x)>1$ et $g(y)>1$

Donc : $g(x)+g(y)>2\Rightarrow 2-g(x)-g(y)\neq 0$

$\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$

Par suite : g est injective

3) Montrons que : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$ et déterminons sa réciproque :

Soit $y\in]1;+\infty[$:tel que : $g(x)=y$

$$g(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}-x=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}=x+y\Leftrightarrow x^2+2x+2=x^2+2xy+y^2$$

$\Leftrightarrow 2x+2=2xy+y^2\Leftrightarrow 2x(1-y)=y^2-2\Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-2}{2(1-y)}\in\mathbb{R}$ car $y-1\neq 0$

Donc : $\forall y\in]1;+\infty[\ \exists x!\in\mathbb{R}$: $x=\dfrac{y^2-2}{2(1-y)}$

Donc : la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1;+\infty[$

$$f^{-1}:\begin{cases}]1;+\infty[\mapsto\mathbb{R}\\ x\mapsto f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-2}{2(1-x)}\end{cases}$$

Exercice2 : (5 ,5pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :

$3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (1) et $\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$ (2)

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1). Placer M.
2) Trouver les réels α et β pour que M soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2). Placer N.
4) Trouver les réels α' et β' pour que N soit barycentre des points pondérés (C, α') et (D, β').

5) Justifier que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

Solution :1) Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1).

$3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ce qui permet de placer M

2) $3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}-2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Ainsi : $\alpha=1$ et $\beta=2$: M soit barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2).

3) Exprimons $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2) :

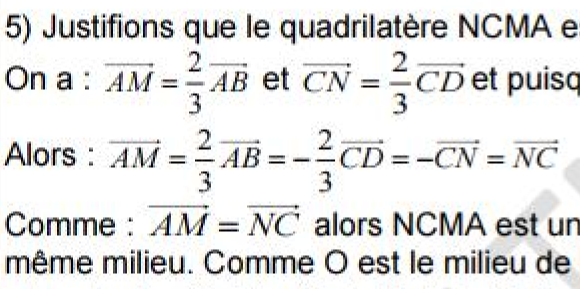
$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}+3\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}\Leftrightarrow-2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

4) Comme : $\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$ alors : $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{ND}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{DN}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN}=\vec{0}$

Alors : $\overrightarrow{NC}+2\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Ainsi : $\alpha'=1$ et $\beta'=2$: N soit barycentre des points pondérés (C, 1) et (D, 2).



5) Justifions que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

On a : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et puisque : ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$

Alors : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NC}$

Comme : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ alors NCMA est un parallélogramme. Les diagonales [MN] et [AC] ont le même milieu. Comme O est le milieu de [AC] alors O est aussi le milieu de [MN].

Exercice3 : (8pts) : $(2\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts})$

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. On considère la famille de courbes (C_m) dont une équation est : $(C_m): x^2+y^2+mx+(2m+2)y+2m+1=0$

1) Construisez et caractériser : (C_{-4}) ; (C_{-2}); (C_0); (C_2)

2) Montrer que, quel que soit le réel m : (C_m) passent par un point fixe I dont on déterminera les Coordonnées

3)a) Déterminez la condition sur m pour que (C_m) soit l'équation d'un cercle. Déduisez-en les Coordonnées des centres Ω_m de ces cercles)

b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}$

4)Montrez que tous les cercles (C_m) ont la même tangente en A. Déterminez une équation Cartésienne de cette droite.

PROF : ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien