http://www.xriadiat.com DS2: I PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (9,5pts) : $(1pt+0,5pt+1pt+1,5pt+1pt+0,5pt+0,5pt+1pt+1,5pt+0,5pt+0,5pt)$

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+2}$ et $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

A) 1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3) Déterminer les tableaux de variations de f et g

4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$

B)1) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Déterminer D_h b) Montrer que : $h=f\circ g$

2) a) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$

b) Étudier les variations de h et donner son tableau de variation.

c) Déterminer la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrer que : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Solution : A) 1) $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) $A(-1;1)$ et $B(2;2)$:

$f(-1)=g(-1)=1\Rightarrow A(-1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

3)Détermination des tableaux de variations de f et g :

x	$-\infty$ $1/2$ $+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

x	-2 $+\infty$
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

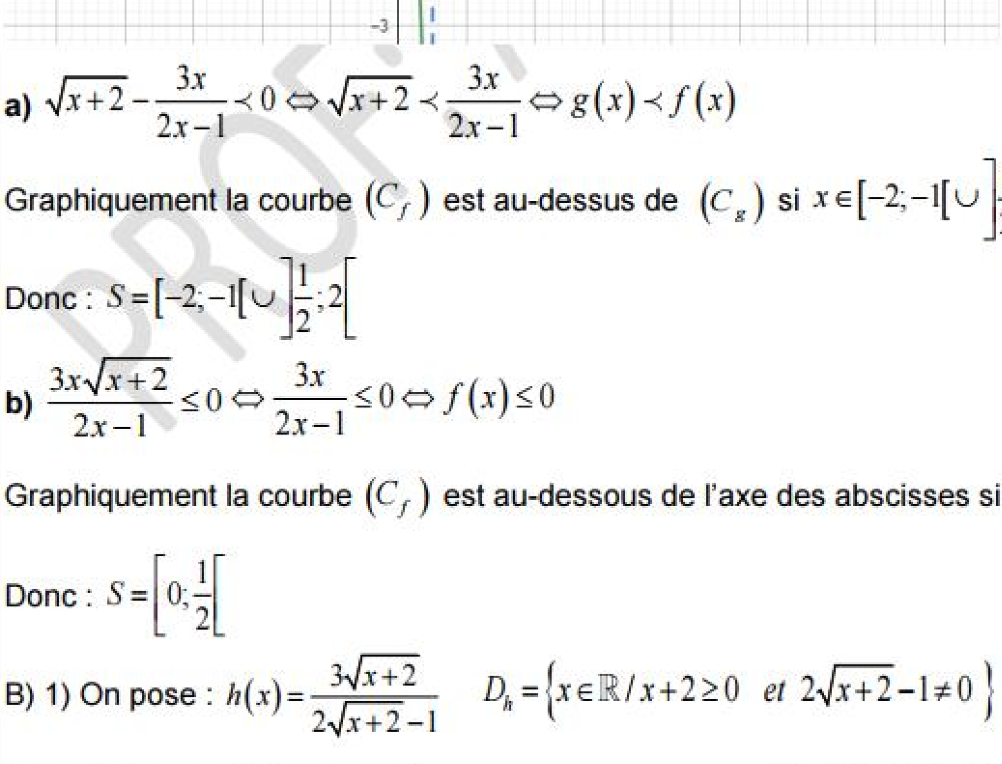
3) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) $g(x)=\sqrt{x+2}$:

b) (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives

$x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

x	-2	-1	2	7
$g(x)$	0	1	2	3



4) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ des inéquations : $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$:

a) $\sqrt{x+2}-\frac{3x}{2x-1}\prec 0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}\prec\frac{3x}{2x-1}\Leftrightarrow g(x)\prec f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[-2;-1[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

Donc : $S=[-2;-1[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

b) $\frac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{3x}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses si $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$

Donc : $S=\left[0;\frac{1}{2}\right[$

B) 1) On pose : $h(x)=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$ $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\ \ et\ \ 2\sqrt{x+2}-1\neq 0\right\}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ \sqrt{x+2}\neq \frac{1}{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ x+2\neq\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ x\neq-\frac{7}{4}\right\}$

$D_h=\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

b) Montrons que : $h=f\circ g$:

$f\circ g(x)=f(g(x))=\frac{3g(x)}{2g(x)-1}=\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=h(x)$

2) a) graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ $\left(g\left(\frac{-7}{4}\right)=\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Étude des variations de h et détermination de son tableau de variation :

- Puisque g est croissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$ et $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$
- Puisque g est croissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

x	-2 $-7/2$ $+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

c) Détermination de la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

On a : h est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

Alors : $x\in\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\Rightarrow -2\leq x\prec-\frac{7}{4}\Rightarrow h(x)\leq h(-2)$ et $h(-2)=0$

Donc :0 est la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrons que : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

$h(x)\succ\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\frac{3}{2}$ et puisque : $x\succ-\frac{7}{4}$ alors : $2\sqrt{x+2}-1\succ 0$

Donc : $\frac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\frac{3}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x+2}\succ 6\sqrt{x+2}-3\Leftrightarrow 0\succ -3$ (vraie)

Donc : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Exercice2 : (5pts) : $(1pt+1pt+1pt+1pt+1pt)$

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.
Soit H le barycentre du système pondéré :{(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré :{(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

1)Montrer que $\overline{BE}=-\frac{1}{4}\overline{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) En déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :1) On sait que : si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$\overline{ME}=\frac{1}{4}\left(5\overline{MB}-\overline{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overline{BE}=-\frac{1}{4}\overline{BC}$ et on peut Construire E

2) On a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré :{(A, 1) ; (E, 2)}

On sait que si : M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overline{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overline{ME}+\overline{MA}\right)$

Pour : M=A on a : $\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré {(D, -6); (E, 4) }
Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré :{(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?
Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
Pour tout point M du plan (P) on a : $-\overline{MK}=-3\overline{MD}+2\overline{ME}$

Donc : $3\overline{MD}=\overline{MK}+2\overline{ME}$
Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
4) b) Pour tout point M du plan (P) on a : $3\overline{MH}=2\overline{ME}+\overline{MA}$ et $3\overline{MD}=2\overline{ME}+\overline{MK}$

Donc : $3\overline{DH}=3\overline{MH}-3\overline{MD}$: $3\overline{DH}=3\left(\overline{MH}-\overline{MD}\right)$

Donc : $3\overline{DH}=\overline{MA}-\overline{MK}$
Donc : $3\overline{DH}=-\overline{AK}$ Donc : $(AK)\parallel(DH)$

Exercice3 : (5,5pts) : $(1,5pt+1pt+1pt+1pt+1pt)$

Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

Considérons les points $A(1;-1)$; $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=3\times(-3)+0\times 3=-9$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}3&-3\\0&3\end{vmatrix}=9$

2)soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+0^2}=3$ et $AC=3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha=\frac{-9}{9\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\cos\alpha=-\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

Donc : $\cos\alpha=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\alpha=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\cos\alpha=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

3) On a : $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{9}{2}cm^2$

4) Soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc : $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ)

Donc : $(\Delta):-6x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(\Delta)$

Donc : $-6\times 1-3+c=0\Leftrightarrow c=9$

Donc : $(\Delta):-6x+3y+9=0$ Alors : $(\Delta):2x-y-3=0$

4) Soit (D) la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D) on a : $d(M;(AB))=d(M;(AC))$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB):

On a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ un vecteur directeur de de la droite (AB): $\overrightarrow{AB}(-b;a)$

$(AB):ax+by+c=0$ avec : $b=-3$ et $a=0$

Donc : $(AB):-3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(AB)$

Donc : $3+c=0\Leftrightarrow c=-3$

Donc : l'équation cartésienne de (AB) est : $(AB):-3y-3=0$ c'est-à-dire : $(AB):y+1=0$

b) Déterminons une équation cartésienne de la droite (AC):

On a : $\overrightarrow{AC}(-3;3)$ un vecteur directeur de de la droite (AC): $\overrightarrow{AC}(-b;a)$

$\overrightarrow{AC}:ax+by+c=0$ avec : $b=3$ et $a=3$

Donc : $(AC):3x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(AC)$

Donc : $3-3+c=0\Leftrightarrow c=0$

Donc : l'équation cartésienne de (AC) est : $(AC):3x+3y=0$ c'est-à-dire : $(AC):x+y=0$

$d(M;(AB))=d(M;(AC))\Leftrightarrow\frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases}y+1\geq 0\\x+y\geq 0\end{cases}$

Donc : $\sqrt{2}(y+1)=x+y$

Donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$\begin{cases}x+(1-\sqrt{2})y-\sqrt{2}=0\\y+1\geq 0\end{cases}$;

(D) est une demie droite

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien