http://www.xriadiat.com **DS2: H** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (10,5pts) : $(1\text{pt}+0,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+2}$ et $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

A) 1) Déterminer D_f et D_g

2) Montrer que : $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

3) Déterminer les tableaux de variations de f et g

4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations : $\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\dfrac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$

B)1) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Déterminer D_h b) Montrer que : $h=f\circ g$

2) a) Déterminer graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$

b) Étudier les variations de h et donner son tableau de variation.

c) Déterminer la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrer que : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Solution : A) 1) $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{1}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) $A(-1;1)$ et $B(2;2)$: $f(-1)=g(-1)=1\Rightarrow A(-1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

3)Détermination des tableaux de variations de f et g :

x	-2	-1	2	7

x	$-\infty$ $1/2$ $+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

x	-2 $+\infty$
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

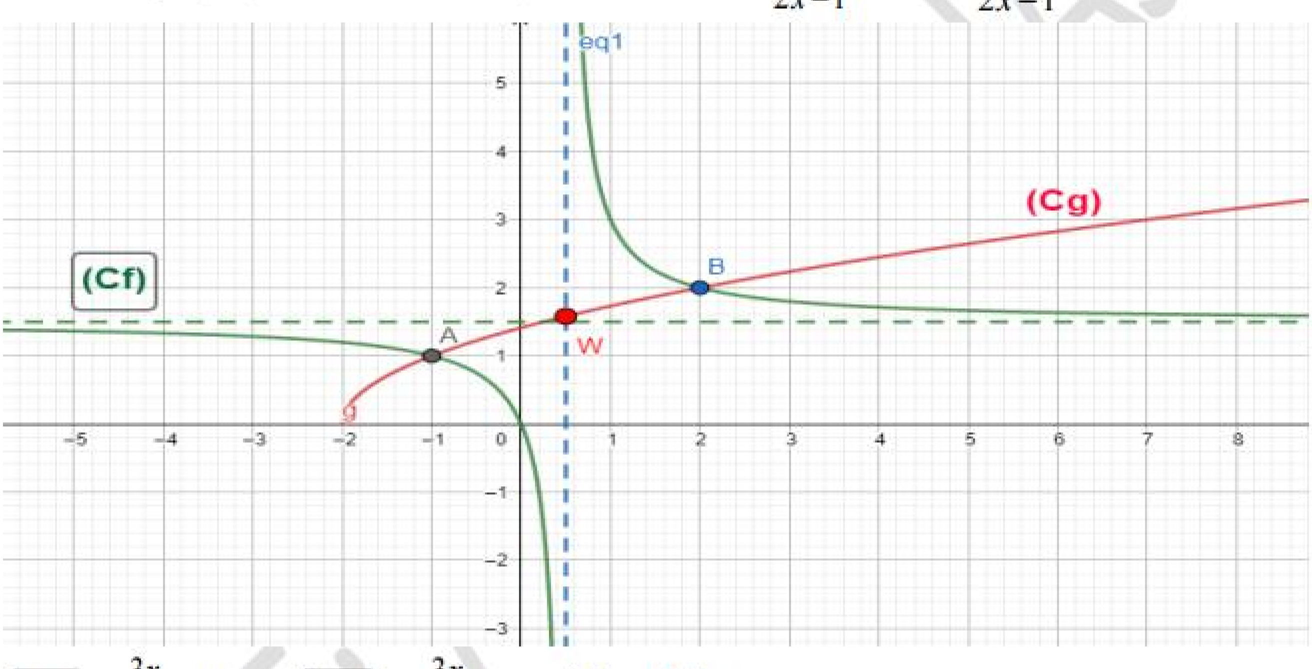
$g(x)$	0	1	2	3

3) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) $g(x)=\sqrt{x+2}$:

b) (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

4) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ des inéquations : $\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2x-1}\prec 0$ et $\dfrac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0$:



a) $\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2x-1}\prec 0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}\prec\dfrac{3x}{2x-1}\Leftrightarrow g(x)\prec f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[-2;-1[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

Donc : $S=[-2;-1[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[$

b) $\dfrac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2x-1}\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses si $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$

Donc : $S=\left[0;\frac{1}{2}\right[$

B) 1) On pose : $h(x)=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$ $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\ \ et\ \ 2\sqrt{x+2}-1\neq 0\right\}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ \sqrt{x+2}\neq\frac{1}{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ x+2\neq\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\ \ et\ \ x\neq-\frac{7}{4}\right\}$

$D_h=\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\cup\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

b) Montrons que : $h=f\circ g$:

$f\circ g(x)=f(g(x))=\dfrac{3g(x)}{2g(x)-1}=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}=h(x)$

2) a) graphiquement : $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ $\left(g\left(\frac{-7}{4}\right)=\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Étude des variations de h et détermination de son tableau de variation :

- Puisque g est croissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$ et $g\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

- Puisque g est croissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$ et $g\left(\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et f est décroissante sur

$\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[$

x	-2 $-7/2$ $+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

c) Détermination de la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

On a : h est décroissante sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

Alors : $x\in\left[-2;-\frac{7}{4}\right[\Rightarrow -2\leq x\prec-\frac{7}{4}\Rightarrow h(x)\leq h(-2)$ et $h(-2)=0$

Donc :0 est la valeur maximale de h sur $\left[-2;-\frac{7}{4}\right[$

3) Montrons que : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

$h(x)\succ\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\dfrac{3}{2}$ et puisque : $x\succ-\frac{7}{4}$ alors : $2\sqrt{x+2}-1\succ 0$

Donc : $\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}\succ\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 6\sqrt{x+2}\succ 6\sqrt{x+2}-3\Leftrightarrow 0\succ -3$ (vraie)

Donc : $h(x)\succ\frac{3}{2}$; $\forall x\in\left]-\frac{7}{4};+\infty\right]$

Exercice2 : (3pts)
ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2).
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
Indication : on pourra considérer le barycentre G de (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Solution : a) Considérons G le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme A' est le barycentre des points (B, 2) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (A, 5) et (A', – 1).
Ceci prouve que : les points A, G et A' sont alignés.
b) G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme B' est le barycentre des points (A, 5) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (B', 2) et (B, 2).
Ceci prouve que : les points B, G et B' sont alignés.
c) G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme C est : le barycentre des points (A, 5) et (B, 2), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (C', 7) et (C, – 3).
Ceci prouve que : les points B, G et B' sont alignés. Donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice3 : (3 pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

Considérons les points $A(1;2)$; $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $\overrightarrow{AB}(a,b)$ avec $(D)/ax+by+c=0$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ Donc : $(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc : $(\Delta)/2x+y+c=0$

On a : $A\in(\Delta)$ donc : $2\times 1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Donc : $(\Delta):2x+y-4=0$

Exercice4 : (1,5 pts) On considère le cercle (C) de centre I(–1 ; 2) et de rayon 3 et la droite (D) d'équation : $y=-x-2$
Déterminer l'intersection de la droite (D) et du cercle (C).
Solution : Les coordonnées des points d'intersection de la droite (D) et du cercle (C) doivent vérifier les deux équations de la droite (D) et du cercle (C), c'est-à-dire un système formé par ces deux équations.
Le cercle (C) de centre I(–1 ; 2) et de rayon 3 a pour équation :

$(x--1)^2+(y-2)^2=3^2$ soit $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

Une équation de la droite (D) est $y=-x-2$ donc on doit résoudre le système suivant :

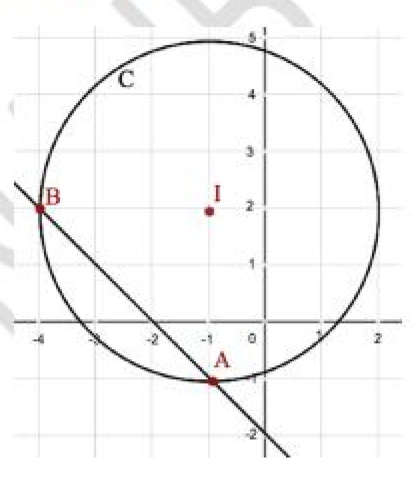
$(S)\begin{cases}(1):(x+1)^2+(y-2)^2=9\\(2):y=-x-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(1):(x+1)^2+(-x-2-2)^2=9\\(2):y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+x^2+8x+16=9\\(2):y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+10x+8=0\\(2):y=-x-2\end{cases}$

On résout l'équation de second degré $2x^2+10x+8=0$ et on reprend notre système.

$2x^2+10x+8=0$: $\Delta=36$

$x_1=\dfrac{-10+6}{4}=-1$ et $x_1=\dfrac{-10-6}{4}=-4$



Donc notre système est équivalent à : $\begin{cases}x=-1\ ou\ x=-4\\(2):y=-x-2\end{cases}$

Ce qui est équivalent à : $\begin{cases}x=-1\\y=-x-2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-4\\y=-x-2\end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$

Donc les coordonnées des points d'intersection de la droite (D) et du cercle (C) sont :(–1 ; –1) et (–4 ; 2).

Exercice5 : (2 pts) : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1) Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Solution :1) On a : $0^2+1^2-4\times 0-2\times 1+1=0$

Donc $A(0;1)\in(C)$

2)L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A. ?? $a=2;b=1;c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc $(\mathcal{C})$ cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2}\right)$ c'est-à-dire : $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est : $(D):x=0$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien