1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : $(6,5\text{pts})$: $(0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

1) a) Déterminer D_f

b) Démontrer que f admet une valeur minimale en 2 sur D_f

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Représenter (C_g) La courbe représentative de g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déterminer :

$g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$

c) Déterminer la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f(x)=(h\circ g)(x)$

Puis étudier les variations de f

Solution : 1) a) $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$

Par suite : $D_f=[1;+\infty[$

b) Démontrons que f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

C'est-à-dire : montrons $\forall x\in[1;+\infty[\ ;f(x)\geq f(2)$

Soit $x\in[1;+\infty[$: $f(x)-f(2)=3x-6\sqrt{x-1}+8-8=3x-6\sqrt{x-1}=3\left(x-1-2\sqrt{x-1}+1\right)$

$f(x)-8=3\left(\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1^2\right)=3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geq 0$

Donc : $f(x)+4\geq 0$ par suite : $f(x)\geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x)\geq f(0)$

Donc : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;f(x)\geq f(2)$

Par suite : f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

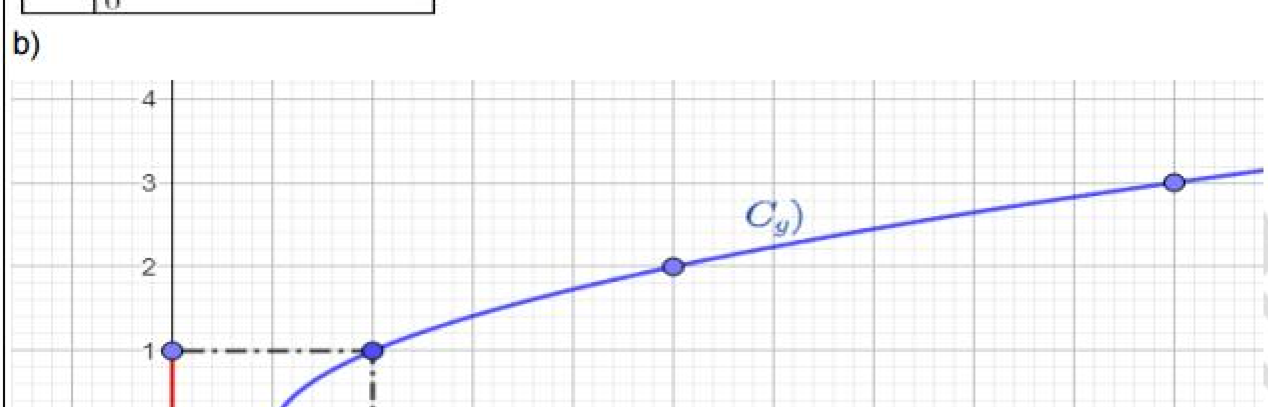
a) Dresser le tableau de variation de g

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

x	1	$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$

b)



c) Déterminons : $g([1;2])$

$\rightarrow x\in[1;2]\Rightarrow 1\leq x\leq 2\Rightarrow g(1)\leq g(x)\leq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[1;2]$

$\Rightarrow 0\leq g(x)\leq 1\Rightarrow g(x)\in[0;1]$

Donc : $g([1;2])\subset[0;1]$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b\in[0;1]$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\forall b\in[0;1]\ ;\ \exists! x\in[1;2]/g(x)=b$

Donc : $[0;1]\subset g([1;2])$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([1;2])=[0;1]$

d) Déterminons : $g([2;+\infty[)$

$\rightarrow x\in[2;+\infty[\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow g(x)\geq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

$\Rightarrow g(x)\geq 1\Rightarrow g(x)\in[1;+\infty[$

Donc : $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b\in[1;+\infty[$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[2;+\infty[$

Donc : $\forall b\in[1;+\infty[\ ;\ \exists! x\in[2;+\infty[/g(x)=b$

Donc : $[1;+\infty[\subset g([2;+\infty[)$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$

c) Déterminons la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f(x)=(h\circ g)(x)$

puis étudions les variations de f :

Soit $x\in[1;+\infty[$: on a : $f(x)-8=3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$

Donc : $f(x)=3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+8=3\left(g(x)-1\right)^2+8$

On pose : $h(x)=3(x-1)^2+8$

Donc : $f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$

Donc : $f=(h\circ g)$

Dressons le tableau de variation de h :car $h(x)=3(x-1)^2+8$ polynôme du second degré

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	8	$\nearrow$

On a : $f=(h\circ g)$

• Puisque g est strictement croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])=[0;1]$ et h est strictement décroissante sur $[0;1]$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement décroissante sur $[1;2]$

• Puisque g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$ et h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

Exercice2 : $(4,5\text{pts})$: $(1,5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés : (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).
On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).
1) Placer I et J en justifiant
2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Placer K en justifiant

Solution : 1) I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1)

$2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AI}$

Ce qui permet de placer le point I (A est le milieu de [IB]).
J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)

$2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$:Ce qui permet de placer le point J.

2) Réduisons l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KI}$:car I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1).
$2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\overrightarrow{KJ}$ car J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)
Comme K est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) (D, 1) alors
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$
Ainsi K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Pour construire le point K, on place d'abord I
(Sachant que I est le symétrique de B par rapport à A)

Puis on place J (sachant que $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$). Pour finir on utilise :

$\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KI}+3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{IJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ ce qui permet de placer le point K

La méthode est à retenir : Pour placer le barycentre de 4 points (A, α), (B, β), (C, γ) (D, δ) :
On construit d'abord I le barycentre de (A, α) ; (B, β) et J le barycentre de (C, γ) ;(D, δ).
Puis on construit K le barycentre de (I, α + β) et (J, γ + δ)

Exercice3 : (3 pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ direct

Considérons les points $A(5;0)$; $B(2;1)$ et $C(6;3)$.

1) Calculer : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire la nature du triangle ABC

3) En déduire une mesure des l'angles : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Solution : 1) On sait que : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times 1+1\times 3=-3+3=0$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3&1\\1&3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice4 : (4 pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$ Soit A (−2 ;1) et B (4 ; −2) deux points du plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

On note (C) l'ensemble des points M (x ; y) du plan tels que : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$

1)Déterminer l'ensemble (C)
2) Déterminer une équation de la droite (AB).
3) Déterminer les points d'intersection I et J de (AB) avec (C) .
4)Déterminer une équation de la tangente à (C) au point $K(2;-1)$.

Solution : 1) $x^2+y^2+2x-6y-15=0\Leftrightarrow(x+1)^2-1+(y-3)^2-9-15=0\Leftrightarrow(x-(-1))^2(y-3)^2=25$

Le point M décrit donc le cercle de centre $C(-1;3)$ et de rayon 5.

2) $\overrightarrow{AB}(6;-3)$ Ainsi une équation de la droite (AB) est de la forme $3x+6y+c=0$.
$A(-2;1)$ vérifie donc cette équation. Ainsi $-6+6+c=0$ et $c=0$.
Une équation de (AB) est donc $3x+6y=0$ ou $y=-12x$.

3) Les coordonnées de I et J vérifient le système : $(S)\begin{cases}(1):(x+1)^2+(y-3)^2=25\\(2):y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+\left(-\frac{1}{2}x-3\right)^2=25\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+\frac{1}{4}x^2+3x+9=25\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{4}x^2+4x-15=0\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

On détermine les solutions de $54x+5x-15=0$: $\Delta=100$. Les solutions sont donc : $x_1=2$ et $x_2=-6$

Ainsi Si $x_1=2$ alors $y=-1$ et si $x_2=-6$ alors : $y=3$.
On a donc $I(-6;3)$ et $J(2;-1)$.
4)Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ est normal à la tangente à (C) en K.

Or $\overrightarrow{CK}(3;-4)$ Une équation de la tangente est alors de la forme $3x-4y+c=0$.
Or K appartient à cette droite donc :$6+4+c=0$ soit $c=-10$.
Une équation de la tangente à (C) en K est donc $3x-4y-10=0$

Exercice5 : (2 pts) : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Soient les points $A(4;0)$ $B(4;4)$; $C(0;4)$.

Déterminer une équation du cercle inscrit dans le carré OABC
Solution : Il faut déterminer les coordonnées du centre du cercle : il se trouve au milieu du segment [OB].
Comme O(0;0) et B(4;4), le centre Ω a pour coordonnées (20+4;20+4) donc Ω(2;2).
Le cercle passe par le point de coordonnées (2;4) donc le rayon est :

$r=\sqrt{(2-2)^2+(2-4)^2}=2$

Le cercle a pour équation :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien