http://www.xriadiat.com DS2: F PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (8pts) : $(1pt+1pt+1pt+1pt+1pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)$

1) Calculer : $f\left(\frac{2023}{2}\right)$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=x$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\leq 2x+1$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

4) Simplifier l'expression de : $f(x)$ sur l'intervalles : $I_1=[0;1[$

5)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

6) Résoudre dans $[-3;3]$ les équations suivantes : a) $f(x)=0$ b) $f(x)=1$ c) $2f(x)=3$

Solution : 1) $f\left(\frac{2023}{2}\right)=\left(\frac{2023}{2}-E\left(\frac{2023}{2}\right)\right)\left(E\left(\frac{2023}{2}\right)-\frac{2023}{2}+2\right)$

On a : $E\left(\frac{2023}{2}\right)=E\left(\frac{2022+1}{2}\right)=E\left(\frac{2022}{2}+\frac{1}{2}\right)=E\left(1011+\frac{1}{2}\right)=1011+E\left(\frac{1}{2}\right)=1011+0=1011$

$f\left(\frac{2023}{2}\right)=\left(\frac{2023}{2}-1011\right)\left(1011-\frac{2023}{2}+2\right)=\left(\frac{2023-2022}{2}\right)\left(\frac{2026-2023}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : (E) $f(x)=x$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Remarque : on peut procéder par équivalence : $x\in S\Leftrightarrow x\in\{...\}$ et donc : $S=\{...\}$

Mais ici on procéder par double implication ☹ (analyse puis synthèse)

$\Rightarrow$) Analyse :

$x\in S\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow$ (……on va encadrer $f(x)$)

$\forall x\in\mathbb{R}$; on a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1\Leftrightarrow 0\leq x-E(x)\prec 1$ ❶

$0\leq x-E(x)\prec 1\Rightarrow -1\prec -x+E(x)\leq 0\Rightarrow 1\prec E(x)-x+2\leq 2$ ❷

❶ $\otimes$ ❷ $\Rightarrow$) $\boxed{0\leq f(x)\prec 2}$

$f(x)=x\Rightarrow 0\leq x\prec 2$

Disjonction des cas :

✓ Si : $0\leq x\prec 1$: $f(x)=x\Leftrightarrow(x-E(x))(E(x)-x+2)=x\Leftrightarrow(x-0)(0-x+2)=x$

$\Leftrightarrow x(-x+2)=x\Leftrightarrow -x^2+2x=x\Leftrightarrow -x^2+x=0\Leftrightarrow x(-x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $-x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\cancel{x=1}$ car $1\notin[0;1[$

Donc : $S_1=\{0\}$

✓ Si : $1\leq x\prec 2$: $f(x)=x\Leftrightarrow(x-E(x))(E(x)-x+2)=x\Leftrightarrow(x-1)(1-x+2)=x$

$\Leftrightarrow(x-1)(3-x)=x\Leftrightarrow 3x-x^2-3+x=x\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ $\Delta=9-4\times 3\prec 0$ Pas de solution

Donc : $S_2=\varnothing$

Donc : $S\subset\{0\}$ (car $\Rightarrow$ seulement) fini donc : l'Analyse :

$\Leftarrow$) Synthèse : $\{0\}?\subset?S$

$f(0)=(0-E(0))(E(0)-0+2)=0(0+2)=0$

Donc : $f(0)=0$ par suite : $\{0\}\subset S$

Finalement : $S=\{0\}$

2) b) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : (I) $f(x)\leq 2x+1$

Soit : S l'ensemble des solutions de l'inéquation (I)

$x\in S\Rightarrow f(x)\leq 2x+1\Rightarrow$ (……on va trouver un autre encadrement plus finn de $f(x)$)

On a : $0\leq x-E(x)\prec 1\Rightarrow$ on pose : $y=x-E(x)$ donc : $0\leq y\prec 1$

$y=x-E(x)\Rightarrow f(x)=y(-y+2)=-y^2+2y=-(y^2-2y)=-(y^2-2y+1-1)=-((y-1)^2-1)$

Donc : $f(x)=-(y-1)^2+1$

On a : $0\leq y\prec 1$ donc : $-1\leq y-1\prec 0$ donc : $0\prec(y-1)^2\leq 1$ donc : $-1\leq -(y-1)^2\prec 0$

Donc : $0\leq 1-(y-1)^2\prec 1$ par suite : $\boxed{0\leq f(x)\prec 1}$ (bon encadrement)

$x\in S\Leftrightarrow f(x)\leq 2x+1$

✓ Si : $1\leq 2x+1$: alors : $f(x)\prec 1\leq 2x+1$ l'inéquation : (I) $f(x)\leq 2x+1$ est toujours vérifier

$1\leq 2x+1\Leftrightarrow 0\leq 2x\Leftrightarrow 0\leq x$

Donc : $S_1=[0;+\infty[$

✓ Si : $2x+1\prec 0\Leftrightarrow x\prec -\frac{1}{2}$: alors : $2x+1\prec 0\leq f(x)$ c'est-à-dire : $2x+1\prec f(x)$

L'inéquation : (I) $f(x)\leq 2x+1$ n'a pas de solutions

Donc : $S_2=\varnothing$

✓ Si : $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right[$: alors : $f(x)\leq 2x+1\Leftrightarrow(x-E(x))(E(x)-x+2)\leq 2x+1$

$\Leftrightarrow(x-(-1))((-1)-x+2)\leq 2x+1$ car : $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right[\Rightarrow E(x)=-1$

$\Leftrightarrow(x+1)(-x+1)\leq 2x+1$ $\Leftrightarrow 1-x^2\leq 2x+1$ $\Leftrightarrow 0\leq x^2+2x$

x	$-\infty$ -2 0 $+\infty$
x^2+2x	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$S_3=\left[-\frac{1}{2};0\right[\cap(]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[)=\varnothing$

Finalement : $S=S_1\cup S_2\cup S_3=[0;+\infty[\cup\varnothing\cup\varnothing=[0;+\infty[$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$ et $x-1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=(x+1-E(x+1))(E(x+1)-x-1+2)=(x+1-E(x)-1)(E(x)+1-x-1+2)$

$=(x-E(x))(E(x)-x+2)=f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :

$D_E=D_f\cap[0;1[=\mathbb{R}\cap[0;1[=[0;1[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$:

$x\in[0;1[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

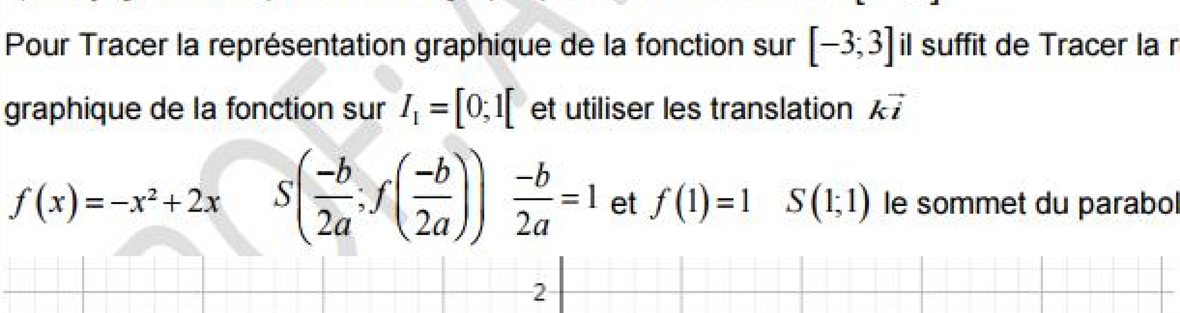
Donc : $f(x)=(x-E(x))(E(x)-x+2)=(x-0)(0-x+2)=x(2-x)$

$f(x)=-x^2+2x$ si $x\in[0;1[$

5) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_1=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

$f(x)=-x^2+2x$ $S\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ $\frac{-b}{2a}=1$ et $f(1)=1$ $S(1;1)$ le sommet du parabole



6) a) Résolution dans $[-3;3]$ de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow(x-E(x))(E(x)-x+2)=0\Leftrightarrow x-E(x)=0$ ou $E(x)-x+2=0$

Or on a : $0\leq x-E(x)\prec 1\Rightarrow -1\prec -x+E(x)\leq 0\Rightarrow 1\prec -x+E(x)+1\leq 2\Rightarrow -x+E(x)+1\neq 0$

$f(x)=0\Leftrightarrow x-E(x)=0$ $\Leftrightarrow E(x)=x$ $\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

D'où : $S=\mathbb{Z}\cap[-3;3]=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

b) Résolution dans $[-3;3]$ de l'équation : $f(x)=1$:

On a déjà montré que : $\boxed{0\leq f(x)\prec 1}$ donc : $f(x)=1$ na pas de solutions

D'où : $S=\varnothing$

Remarque : $f(x)=1$ na pas de solutions donc f non surjective

Et $f(0)=0=f(1)$ Donc f non injective

b) Résolution dans $[-3;3]$ de l'équation : $f(x)=1$:

On a déjà montré que : $\boxed{0\leq f(x)\prec 1}$ donc : $f(x)=1$ na pas de solutions

D'où : $S=\varnothing$

c) $2f(x)=3\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{3}\succ 1$ donc : $f(x)=1$ na pas de solutions car $0\leq f(x)\prec 1$

D'où : $S=\varnothing$

Exercice2 : (6pts) : $(1,5pt+1,5pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm.
Soit I le milieu de [BC].

1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera

2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$ b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}$ c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

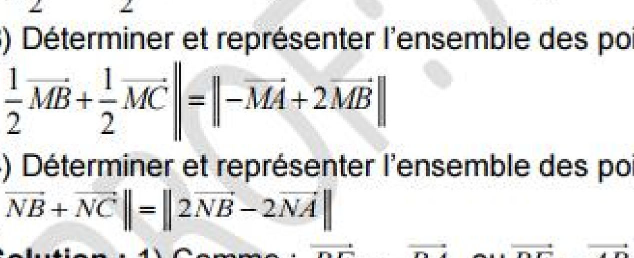
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$

Solution : 1) Comme : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}$; B est le milieu de [AF].

Donc : $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

On en déduit que : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).



2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{PI}$ (identité du parallélogramme).

b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PF}$ car : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).

c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{AP}=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AP})=2\overrightarrow{AB}$

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ (D'après ce qui précède).

L'ensemble des points M vérifiant cette relation est donc la médiatrice de [IF]

4) Déterminons l'ensemble des points N du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$

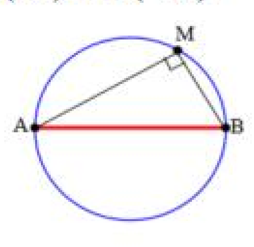
$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{NI}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$: d'après la question 2

$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow NI=AB$

L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon AB.

Exercice3 : (2 pts) : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

Solution : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$



$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

Exercice4 : (4 pts) : $(1pt+3pt)$

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Soient les points $A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$.

1) Montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$; $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D):x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta):x+2y-1=0$ (après simplifications)

Soit : Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc c'est le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système : $\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$

La résolution de ce système donne : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

L'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

C'est-à-dire : $(C):x^2+y^2+2x-2y-23=0$.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien