http://www.xriadiat.com **DS2: E** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Durée :2 heures

Exercice1 : (8pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt})$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{|x|}{x^3+x}$

1) a) Déterminer D_f b) Etudier la parité de f

2) Montrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et en déduire les variations de f dans $]-\infty;0[$

3) Montrer que : $0<f(x)<1$; $\forall x\in]0;+\infty[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ tel que : $g(x)=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}$

a) Montrer que : $g(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in]0;+\infty[$

b) En déduire les variations de g dans $]0;+\infty[$

Solution :1) a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3+x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x(x^2+1)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$

b) Etudions la parité de f

- si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^3+(-x)}=\frac{|x|}{-x^3-x}=-\frac{|x|}{x^3+x}=-f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) Montrons que f est décroissante sur $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{|x|}{x^3+x}=\frac{x}{x^3+x}=\frac{1}{x^2+1}$: $\forall x\in]0;+\infty[$

Soient $x_1\in]0;+\infty[$ et $x_2\in]0;+\infty[$ tel que : $x_1\neq x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2+1}-\frac{1}{x_2^2+1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{-(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

Puisque : $x_1>0$ et $x_2>0$ alors : $x_1+x_2>0$ et puisque : $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

Alors : $T(x_1;x_2)=\frac{-(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}<0$

Par suite f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et comme f est une fonction impaire

Alors : f est croissante sur $]-\infty;0[$

3) Montrons que : $0<f(x)<1$; $\forall x\in]0;+\infty[$

Soit : $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{|x|}{x^3+x}=\frac{x}{x^3+x}=\frac{1}{x^2+1}>0$

$1-f(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}>0$ donc : $f(x)<1$

Par suite : $0<f(x)<1$; $\forall x\in]0;+\infty[$

4) Soit g une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ tel que : $g(x)=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}$

a) Montrons que : $g(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in]0;+\infty[$

Soit : $x\in]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{(f(x))^2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2+1}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2+1}=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}$

Alors : $g(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in]0;+\infty[$

b) Déduction des variations de g dans $]0;+\infty[$

On a : $g=f\circ f$ sur $]0;+\infty[$

Puisque f est décroissante sur $]0;+\infty[$ et $f(]0;+\infty[)=]0;+\infty[$ et f est décroissante sur $]0;+\infty[$ alors $f\circ f$ est croissante sur $]0;+\infty[$

Exercice2 : (5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

ABC un triangle ; I , J et K points tels que : $2\overline{BI}=3\overline{BC}$; $8\overline{CJ}=\overline{CA}$ et $5\overline{AK}=2\overline{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) Le plan (P) est rapporté au repère $R(A;\overline{AB};\overline{AC})$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1) $\frac{1}{2}\overline{BI}-\frac{3}{2}\overline{CI}=\frac{1}{2}\overline{BI}-\frac{3}{2}(\overline{CB}+\overline{BI})=\frac{1}{2}\overline{BI}-\frac{3}{2}\overline{CB}-\frac{3}{2}\overline{BI}=-\overline{BI}+\frac{3}{2}\overline{BC}=-\frac{3}{2}\overline{BC}+\frac{3}{2}\overline{BC}=\vec{0}$

Donc : $\frac{1}{2}\overline{BI}-\frac{3}{2}\overline{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) Dans le repère $R(A;\overline{AB};\overline{AC})$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) On a : $8\overline{CJ}=\overline{CA}$ donc : $8\overline{CA}+8\overline{AJ}=\overline{CA}$

Donc : $8\overline{AJ}=-7\overline{CA}$ donc : $\overline{AJ}=\frac{7}{8}\overline{AC}$

Donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) La droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overline{IK}$

Et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}\times 0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 1}{-1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overline{AK}=2\overline{AB}$ Donc : $\overline{AK}=\frac{2}{5}\overline{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$

Donc : $\overline{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est : $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

Donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$ c'est-à-dire :(IK): $15x-9y+21=0$

c) Pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

On a : (IK): $15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$ et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

Par suite : $J\in(IK)$

Donc : les points I et J et K sont alignés.

Exercice3 : (4 pts) : $(2\text{pt}+2\text{pt})$

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points $A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

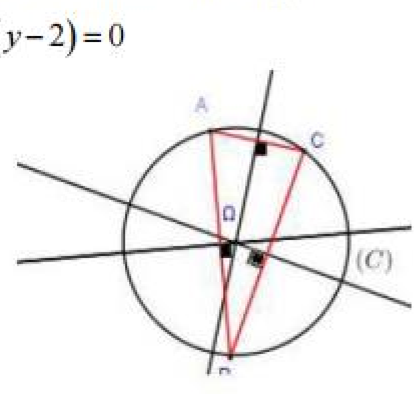
Solution : 1) Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement des segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est : (Δ): $-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : (Δ): $-2x+2-2y+4=0$ donc (Δ): $-2x-2y+6=0$

Donc : (Δ): $x+y-3=0$ (après simplifications)



Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par $J(-1;4)$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ') et on a : $\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est : (Δ'): $-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : (Δ'): $3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système : $\begin{cases}(\Delta): x+y-3=0\\(\Delta'): 3x-y+7=0\end{cases}$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

(C): $x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2) Déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :(C'): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$; $F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

On va donc résoudre le système : $\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{19}{8}\\b=\frac{21}{16}\\c=0\end{cases}$

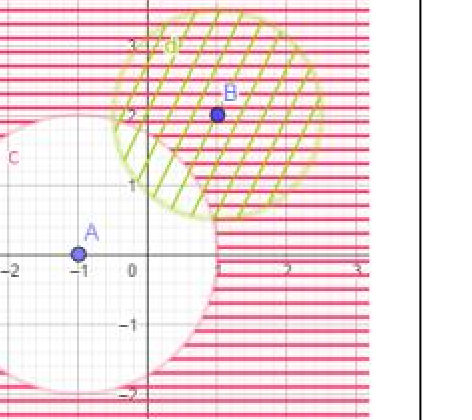
Et l'équation du cercle est : (C'): $x^2+y^2-\frac{19}{4}x-\frac{21}{8}y=0$

Exercice4 : (3 pts) : Résoudre graphiquement le système : $(S)\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}\prec 0\\x^2+y^2+2x-4\succ 0\end{cases}$

Solution : $x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre B (1,2) et de rayon $r=\frac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ Est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre A (−1,0) et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'intersection de l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ et de l'intérieur de $(\mathcal{C})$



PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien