http://www.xriadiat.com **DS2: D** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (7pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt})$

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$

1) Déterminer D_f

2) Donner une expression de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I=]-1;1[$ et $J=]-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty[$

3) Tracer la représentation graphique de la fonction dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

4) Discuter graphiquement selon les valeurs de m le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$

Solution : 1) $D_f=?$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-E(x^2)\neq 0\}$

$1-E(x^2)=0\Leftrightarrow E(x^2)=1\Leftrightarrow 1\leq x^2\prec 1+1\Leftrightarrow 1\leq x^2\prec 2\Leftrightarrow\sqrt{1}\leq\sqrt{x^2}\prec\sqrt{2}\Leftrightarrow 1\leq|x|\prec\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1\leq|x|\ \ et\ \ |x|\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow(x\leq -1\ ou\, x\geq 1)et\left(-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\right)$

$1-E(x^2)=0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1]\cup[1;\sqrt{2}[$

$1-E(x^2)\neq 0\Leftrightarrow x\notin]-\infty;-1]\cup[1;\sqrt{2}[$

$D_f=\mathbb{R}-(]-\infty;-1]\cup[1;\sqrt{2}[)=]-\infty;-\sqrt{2}]\cup]-1;1[\cup[\sqrt{2};+\infty[$

2)a) L'expression de $f(x)$ sur des l'intervalles :

Si : $x\in]-1;1[\Leftrightarrow|x|\prec 1\Leftrightarrow 0\leq x^2\prec 1\Leftrightarrow 0\leq x^2\prec 0+1\Leftrightarrow E(x^2)=0$

$f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=x^2+E\left(\frac{1}{1-0}\right)=x^2+E(1)=x^2+1$

Si : $x\in]-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty[\Leftrightarrow|x|\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2\geq\sqrt{2}^2\Leftrightarrow x^2\geq\sqrt{2}^2\Leftrightarrow x^2\geq 2$

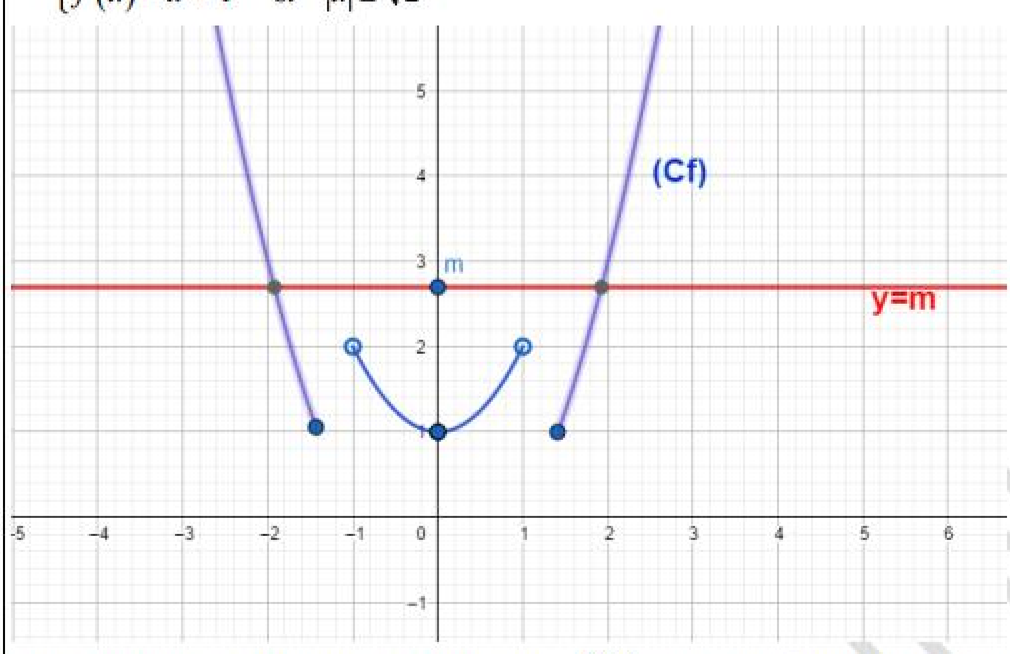
$x^2\geq 2\Rightarrow E(x^2)\geq E(2)$ car E est croissante

$\Rightarrow E(x^2)\geq 2\Rightarrow -E(x^2)\leq -2\Rightarrow 1-E(x^2)\leq 1-2\Rightarrow 1-E(x^2)\leq -1\prec 0\Rightarrow -1\leq\frac{1}{1-E(x^2)}\prec 0$

$\Rightarrow E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=-1\Rightarrow x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)=x^2-1\Rightarrow f(x)=x^2-1$

Donc : $\begin{cases}f(x)=x^2+1 & si\ \ |x|\prec 1\\ f(x)=x^2-1 & si\ \ |x|\geq\sqrt{2}\end{cases}$

3) $\begin{cases}f(x)=x^2+1 & si\ \ |x|\prec 1\\ f(x)=x^2-1 & si\ \ |x|\geq\sqrt{2}\end{cases}$



4) Le nombre de racines de l'équation : $f(x)=m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\geq 2$: 2 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m=1$: 3 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si: $1\prec m\prec 2$: 4 racines pour l'équation : $f(x)=m$

Si $m\prec 1$: pas de racines pour l'équation : $f(x)=m$

Exercice2 : (4,5pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+1,5\text{pt})$

A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1) Montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;1)$; $(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;-3)$

a) Montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M\in(F)\Leftrightarrow\frac{MA}{MB}=3\Leftrightarrow MA=3MB$

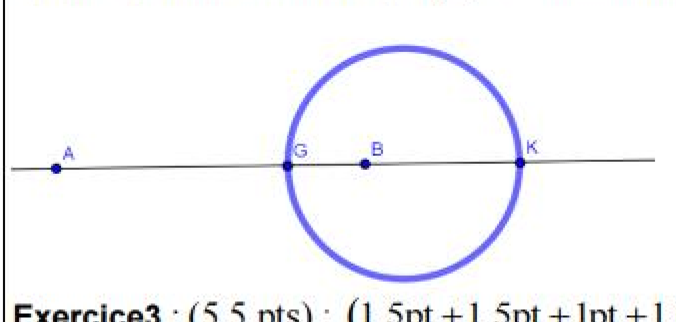
$M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)a) $M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})=0$ et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

2) b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice3 : (5,5 pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt})$

Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points suivants $A(3;2)$, $B(0;5)$ et $C(-2;-1)$.

1) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

2) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

3) Calculer une mesure des angles (BAC) et (ACB) à un degré près.

4) H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer AH et CH .

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{AB}(-3;3)$ Donc : $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

On a : $\overrightarrow{AC}(-5;-3)$ Donc : $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

On a : $\overrightarrow{BC}(-2;-6)$ Donc : $BC=\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) Calculons les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\times(-5)+3\times(-3)=6$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=-2\times 3-6\times(-3)=12$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=5\times 2+3\times 6=28$

3) On sait que : $\cos(BAC)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;3)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;-3)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$

$\cos(BAC)=\frac{6}{3\sqrt{2}\times\sqrt{34}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$ par conséquent : $BAC=76^\circ$

Aussi : $\cos(ACB)=\frac{28}{\sqrt{34}\times 2\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{85}}$ par conséquent : $ACB=41^\circ$

4) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\succ 0$ donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=AH\times AC=6$

Donc : $AH=\frac{6}{\sqrt{34}}\simeq 1,02$ et comme $H\in[AC]$: $CH=AC-AH=\sqrt{32}-1,02=4,63$

Exercice4 : (3 pts) Résoudre graphiquement le système : $(S)\begin{cases}(1):x^2+y^2-4x\prec 0\\(2):x-y-1\succ 0\end{cases}$

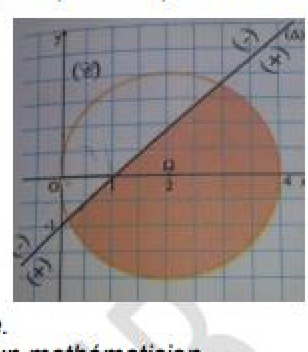
Solution :

$(1):x^2+y^2-4x\prec 0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2\prec 2^2$

Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'intérieur du cercle ($\mathcal{C}$) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r=2$

• $(2):x-y-1\succ 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $x-y-1=0$

(Demi plan qui contient $\Omega(2;0)$ Car : $2-0-1=1\succ 0$)



Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien