http://www.xriadiat.com **DS1: C** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : $(8{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt})$

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_f et D_g

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

4) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x\in[-2;+\infty[$

a) Montrer que : h est majoré par 1 et que -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Étudier les variations de h sur $[-2;+\infty[$

Solution : 1) $f(x)=\sqrt{x+2}$; $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+3\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -3\}=\mathbb{R}-\{-3\}=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Le tableau de variations de f :

x	-2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

Le tableau de variations de g :

En générale si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

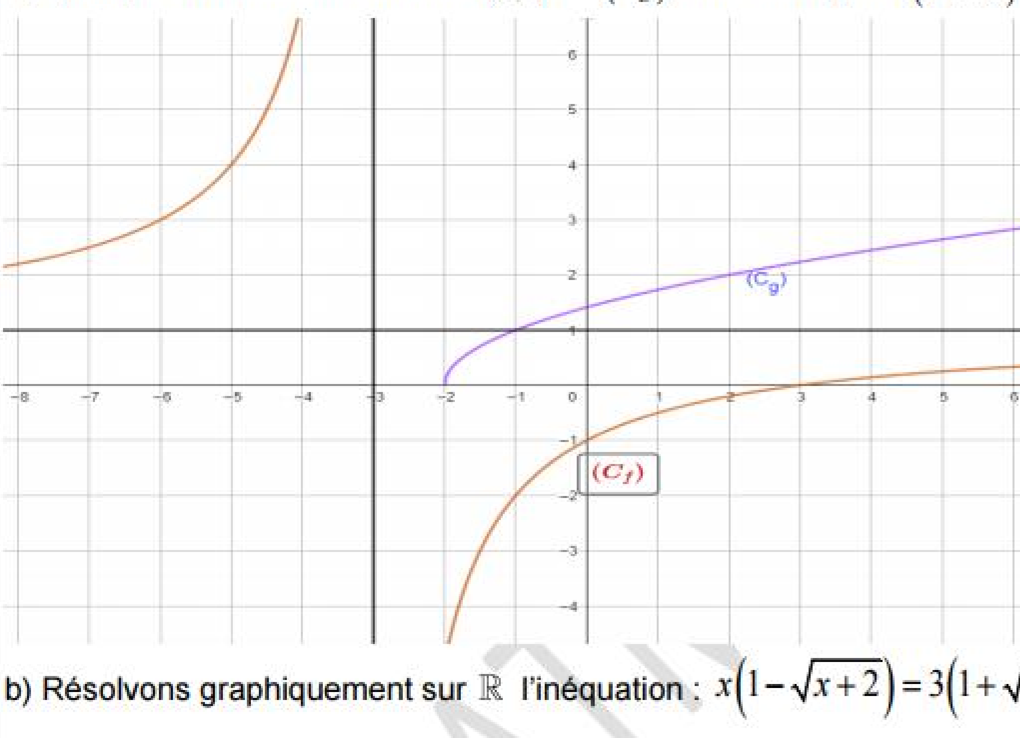
Dans notre exercice on a : $g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $C(-3;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-3$ et $y=1$

$g(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3+3=6>0$

Donc :f est strictement croissante sur : $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$

x	$-\infty$ $\quad$ -3	$\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

3) a) Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



b) Résolvons graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)$

Soit : $x\in[-2,+\infty[$: $x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow x-x\sqrt{x+2}=3+3\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x-3=(x+3)\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\dfrac{x-3}{x+3}=\sqrt{x+2}$

$x\left(1-\sqrt{x+2}\right)=3\left(1+\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow g(x)=f(x)$

Et puisque pas de points d'intersections entre (C_f) et (C_g) alors : $S=\varnothing$

4) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$: $\forall x\in[-2;+\infty[$

a) →Montrons que : h est majoré par 1 :

Soit : $x\in[-2,+\infty[$: $h(x)-1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}-1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3-\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}==\dfrac{-6}{\sqrt{x+2}+3}<0$

Donc : h est majoré par 1 :

→Montrons que : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

Soit : $x\in[-2,+\infty[$: $h(x)-(-1)=\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}+1=\dfrac{\sqrt{x+2}-3+\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}==\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}\geq 0$ et $h(-2)=-1$

Donc : $h(x)\leq h(-2)$: $\forall x\in[-2;+\infty[$

Donc : -1 c'est la valeur maximale absolue de h

b) Etudions les variations de h sur $[-2;+\infty[$: $h=g\circ f$

Puisque f est croissante sur $[-2;+\infty[$ et $f([-2;+\infty[)\subset[0;+\infty[$ et g est croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : $h=g\circ f$ est croissante sur $[-2;+\infty[$

Exercice2 : $(5{,}5\text{pts})$: $(3\text{pt}+2{,}5\text{pt})$

ABCD un carré ; I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$

M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1) Déterminer le barycentre des points pondérés : {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;3)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3) Monter que les droites (MJ) ; (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1) On a : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

Donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$ De même on a :

$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$ donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;3)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G\in(JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$

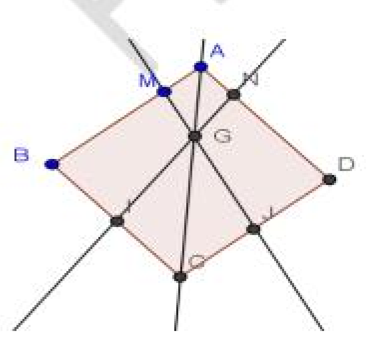
Alors : I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$; d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G\in(NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD

Donc : H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$

Donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H\in[AC]$ donc $G\in(AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice3 : (6 pts) : $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt})$

Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(4;0)$, $B(0;4)$ et $C(-2;0)$.

1)Déterminer une équation du cercle (C) passant par les points A, B et C.

2) On considère le point $D(2;4)$

a) Montrer que D appartient à (C).

b) On désigne respectivement par E, F et G les projetés orthogonaux de D sur les droites (AB), (BC) et (AC).

Déterminer les coordonnées des points E, F et G.

c) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Solution : 1) Une équation de cercle est de la forme : $(1):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ où le centre du cercle a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ et le rayon est R.

Puisque chacun des points appartient au cercle, on obtient le système suivant :

$$(S)\begin{cases}(1):(4-a)^2+(b)^2=R^2\\(2):(a)^2+(4-b)^2=R^2\\(3):(-2-a)^2+(b)^2=R^2\end{cases}$$

En utilisant les équations (1) et (3) on obtient : $:(4-a)^2=(-2-a)^2\Leftrightarrow 16-8a+a^2=4+4a+a^2\Leftrightarrow a=1$

Notre système devient alors : $\begin{cases}(1):9+b^2=R^2\\(2):1+(4-b)^2=R^2\\(3):9+b^2=R^2\end{cases}$

En utilisant les équations (1) et (2) on obtient : $9+b^2=1+(4-b)^2\Leftrightarrow 9+b^2=1+16-8b+b^2\Leftrightarrow b=1$

On utilise cette valeur dans l'équation (3) et on trouve $R^2=10$

Une équation du cercle passant par les points A,B et C est donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=10$

2)a) Regardons si les coordonnées de D vérifient l'équation de (C) :

$(2-1)^2+(4-1)^2=1+9=10$ Donc D appartient à (C) .

b)Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4;4)$ est un vecteur normal à la droite (DE).

Une équation de (DE) est de la forme : $-4x+4y+c=0$.

Or $D\in(DE)$ donc : $-8+16+c=0$ c'est-à-dire : $c=-8$

Une équation de (DE) est donc $-4x+4y-8=0$ ou encore $-x+y-2=0$

Une équation de (AB) est : $y=-x+4$

Les coordonnées du point E vérifient le système : $\begin{cases}y=-x+4\\-x+y-2=0\\(3):9+b^2=R^2\end{cases}$ On obtient ainsi : $E(1;3)$.

On procède de la même manière pour les points F et G et on trouve : $F\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{24}{5}\right)$ et $G(2;0)$.

c) $\overrightarrow{EF}\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{9}{5}\right)$ et $\overrightarrow{EG}(1;-3)$

Par conséquent $\overrightarrow{EG}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{EF}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien