http://www.xriadiat.com **DS1: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (7pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=(x-E(x))^2$

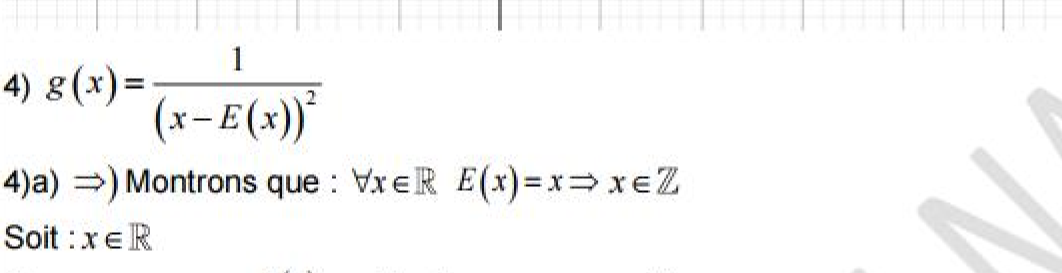
1) Montrer que f est bornée
2) a) Vérifier que 1 est une période pour la fonction f
b) En déduire le domaine d'étude de f
3) a) Donner une expression simple de : $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$
b) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

4)Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
b) En déduire le domaine d'étude de g
c) Donner le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$
d)Tracer la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$

Solution : $f(x)=(x-E(x))^2$

1) On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\le x\prec E(x)+1 \Leftrightarrow 0\le x-E(x)\prec 1 \Leftrightarrow 0^2\le (x-E(x))^2\prec 1^2$
$\Leftrightarrow 0\le f(x)\prec 1$
Donc : f est bornée
2)a) - $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$
- $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=f(x)$
L'application f est donc périodique de période 1.
b) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur :
$D_E=D_f\cap[0;1[=\mathbb{R}\cap[0;1[=[0;1[$
3) a) Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I_1=[0;1[$:
$x\in[0;1[\Leftrightarrow 0\le x\prec 1$
Donc : $f(x)=(x-E(x))^2=(x-0)^2=x^2$
b) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$
Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_1=[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$



4) $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}$

4)a) $\Rightarrow$) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ $E(x)=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$
Soit : $x\in\mathbb{R}$
Supposons que : $E(x)=x$ Montrons que : $x\in\mathbb{Z}$
On a : $E(x)$ est un entier relatif intérieur ou égale a x
Donc : $E(x)\in\mathbb{Z}$ et $E(x)=x$ par suite : $x\in\mathbb{Z}$
$\Leftarrow$) Montrons que : $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow E(x)=x$
On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$
Donc : $E(x)\le x\le E(x)$
Donc : $E(x)=x$
Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}$: $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
b) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-E(x)\ne 0\}=\{x\in\mathbb{R}/E(x)\ne x\}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$
Car : $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
Puisque : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ et $f\ge 0$ et croissante sur $I_1=[0;1[$
Alors : g et décroissante sur $I_1=[0;1[$ et g est aussi périodique de de période 1.
$D_E=D_g\cap[0;1[=]0;1[$
c) Le Tableau de variation de g sur : $]-1;1[$

x	-1 0	1
$g(x)$	$\searrow$	$\searrow$

d)Traçage de la représentation graphique de la fonction g sur : $[-3;3[$
a) Une expression simple de $g(x)$ sur l'intervalle : $]0;1[$:
$x\in]0;1[\Leftrightarrow 0\prec x\prec 1$

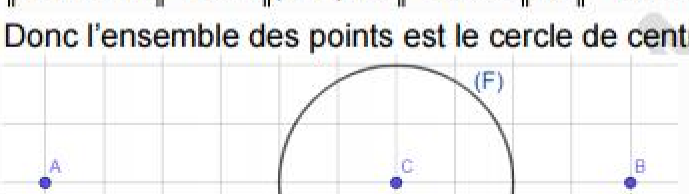
Donc : $g(x)=\dfrac{1}{(x-E(x))^2}=\dfrac{1}{(x-0)^2}=\dfrac{1}{x^2}$

b) Pour Tracer la représentation graphique de la fonction g sur $[-3;3[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $]0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

Exercice2 : $(4,5\text{pts})$: $(0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soient deux points A et B tels que : $AB=10$
1) Construire C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)
2) Construire D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=10$
4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|$
5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=100$

Solution : 1) C : barycentre du système (A ; 2), (B ; 3) donc : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure
2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2) donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure
3) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=10$
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=10\Leftrightarrow\|(2+3)\overrightarrow{MC}\|=10\Leftrightarrow 5\|\overrightarrow{MC}\|=10\Leftrightarrow MC=2$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre C et de rayon : $r=2$



4) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|$
Puisque :C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)
2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|\Leftrightarrow\|(2+3)\overrightarrow{MC}\|=\|(2+3)\overrightarrow{MD}\|\Leftrightarrow 5\|\overrightarrow{MC}\|=5\|\overrightarrow{MD}\|\Leftrightarrow MC=MD$
Donc l'ensemble des points est la droite médiatrice du segment $[CD]$
5) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=k$
Soit $G=Bar\ \{(A,1);(B,3)\}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow AG=\frac{3}{4}AB\Rightarrow AG=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}=7.5$
Et $BG=\frac{1}{4}\times 10=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5.$
$\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=100\Leftrightarrow(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=100$
$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA})^2+3\left((\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{GB})^2\right)=100$
$\Leftrightarrow MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2+3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+3GB^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB})+GA^2+3GB^2=100$

$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB})+GA^2+3GB^2=100$ or : $\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 4MG^2+GA^2+3GB^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2+3\left(\frac{5}{2}\right)^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+75=100\Leftrightarrow 4MG^2=25\Leftrightarrow MG^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow MG=\frac{5}{2}$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=\frac{5}{2}$

Exercice3 : $(8,5\text{pts})$: $(1,5\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) Montrer que (C) est *un cercle* dont on déterminera de centre Ω et le rayon R et une équation cartésienne
2) Soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A
3) Déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$
4) a) Soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$
Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer
b) Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y$

Solution :1) $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=2\cos\theta\\ y-0=2\sin\theta\end{cases}$
$(x-2)^2+(y-0)^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-0)^2=4\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$
Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R=2$
2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$
On a : $(-1-2)^2+(0-0)^2-4=9-4\succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)
Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax+by+c=0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b)\ne(0;0)$
Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors : $d(\Omega,(T))=R$ cad $\dfrac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$:
Et on a : $A\in(T)$ donc : $-a+c=0$ donc on trouve :
$b=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b=-\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou $2x+\sqrt{5}y+2=0$
Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou (T_2) : $2x+\sqrt{5}y+2=0$
3) (D) : $3x-4y=0$ $\Omega(2;0)$
Puisque $(T)\parallel(D)$ donc on pose : (T) : $3x-4y+c=0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$
Donc : $d(\Omega,(T))=R\Leftrightarrow$ cad $\dfrac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2\Leftrightarrow\dfrac{|6+c|}{5}=2\Leftrightarrow|6+c|=10\Leftrightarrow 6+c=10$
Ou $6+c=-10$ c'est-à-dire : $c=4$ ou $c=-16$
Donc les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ sont : (T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) on va résoudre le système suivant : $\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\\ y=x\end{cases}$ donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$
Donc : $(x=0$ ou $x=2)$ et $y=x$
Donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points : $O(0;0)$ et $B(2;2)$
4)b) $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y\Leftrightarrow\begin{cases}x-y\le 0\\ x^2+y^2-4x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y\le 0\\ (x-2)^2+y^2-4\le 0\end{cases}$
L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)
Et L'inéquation : $x-y\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)
Voire la figure ci-dessus :

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien