http://www.xriadiat.com **DS2: A** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

Généralités sur les fonctions ; BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice3 : $(8,5\text{pts})$: $(1\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=1+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad \forall x\in D_f$

b) Etudier le signe de la fonction g sur D_g

3) Etudier la monotonie de f dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) a) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: On a $f(x)=\dfrac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{x^2-2x+1}$

Alors : $f(x)=\dfrac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{1(x-1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{1(x-1)^2}{(x-1)^2}+\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=1+\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $1\le f(x)$

Puisque : $f(x)=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$

Alors : $f(x)-1=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $1\le f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

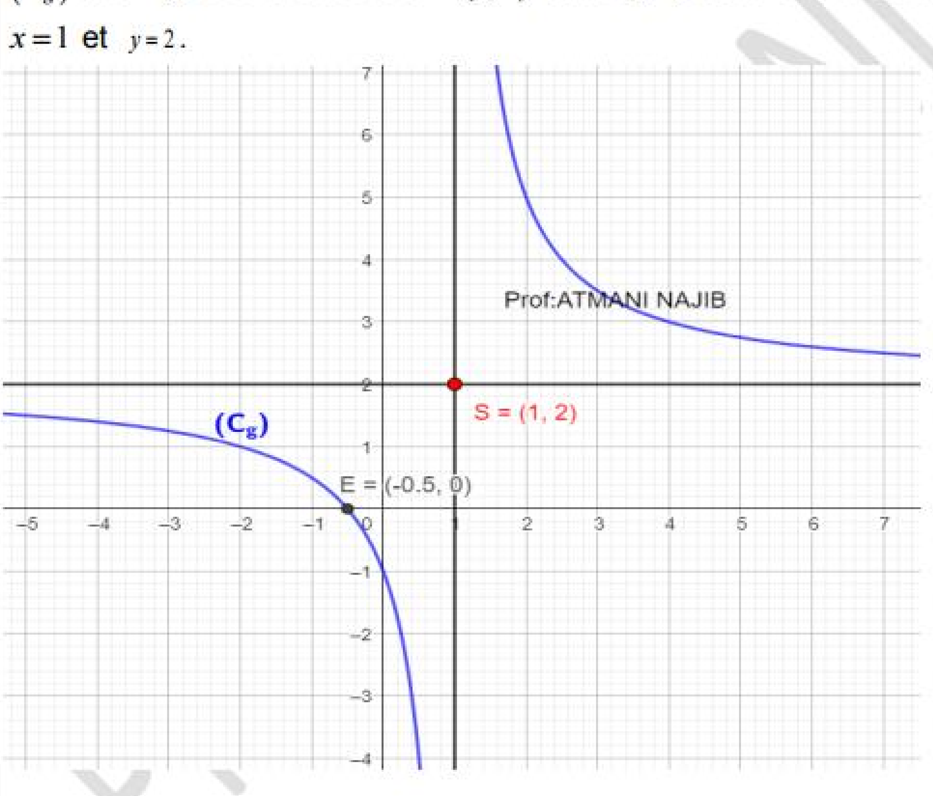
c) Comme : $f(x)-1=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Alors : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ et donc : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\le f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 1 en $-\dfrac{1}{2}$

d) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3<0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.



2) a) Vérifions que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in D_f$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(h\circ g)(x)=h(g(x))=f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\dfrac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=f(x)$

Donc : $f=h\circ g$

c) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

On peut étudier le signe soit :

Graphiquement : $\rightarrow(C_g)$ est au-dessous de l'axe des abscisses si : $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

Donc : $g(x)\le 0\quad\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

$\rightarrow(C_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses si : $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$

Donc : $g(x)\ge 0\ \forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$

Algébriquement : Le tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$g(x)\ge 0\ \forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$ et $g(x)\le 0\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

Le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	1	↗

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in D_f$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	0 ↘	‖	↘

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]:g(x)\in[0;+\infty[$ (voir signe de g) et h est croissante sur $[0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[:g(x)\in]-\infty;0]$ (voir signe de g) ; et h est décroissante sur $]-\infty;0]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $]1;+\infty[$: Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x\in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ (Voir signe de g) et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$.

<u>5)le tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗	‖	↘

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $-\frac{1}{2}$

Exercice2 : $(2,5\text{pts})$: $(2\text{pt}+0,5\text{pt})$ ABCD est un carré.

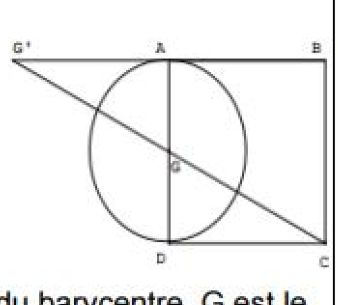
1) Quel est l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AB$?

2) Représenter cet ensemble (E)

Solution :1) Notons : G le barycentre de (A, 2), (B, -1) et (C, 1).

On a, pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AB\Leftrightarrow\|2\overrightarrow{MG}\|=AB\Leftrightarrow 2MG=AB\Leftrightarrow MG=\frac{1}{2}AB$



L'ensemble (E)des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AB$ est donc le cercle de centre G et de rayon : $\frac{1}{2}AB$

2) Représentons cet ensemble (E) : Pour construire G, on commence par construire G' le barycentre des points (A, 2) et (B, – 1). Puis par associativité du barycentre, G est le barycentre des points :
(G', 1) et (C, 1) donc le milieu de [CG'].

Exercice3 : (9pts) : $(1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+2\text{pt})$

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C_m) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $(C_m):x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1) Déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) Montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) c) Montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) Montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente a toutes les *cercles* (C_m)

3) b) Soit : $m\succ\frac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$; Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux Cercles (C_m) .

Solution :1) (C_1) ? Pour $m=1$ on a :$(C_1):x^2+y^2-2x+2y+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0\ et\ y+1=0\Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m):x^2+y^2-2mx+2y+2m=0\Leftrightarrow(x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1|\quad\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) On pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

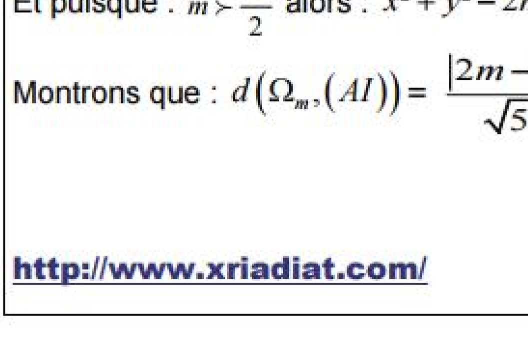
On a donc : l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$

Privé du point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b)\in(C_m)\ \forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0\ \forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2a=0\\ a^2+b^2+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$ et $d(\Omega_m,(\Delta))=\dfrac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|m-1|=R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) On a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m\succ\frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m\succ 0$ donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m,(AI))=\dfrac{|2m-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m) car : $\dfrac{2}{\sqrt{5}}R_m\neq R_m$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien